Ministerul Educației, Cercetării şi Tineretului

**Marius Burtea** **Georgeta Burtea**

# MATEMATICĂ

## Manual pentru clasa a XII-a




**FILIERA TEORETICĂ**
**TRUNCHI COMUN + CURRICULUM DIFERENȚIAT**
Profil real
specializarea: matematică-informatică

**FILIERA VOCAȚIONALĂ**
**TRUNCHI COMUN**
Profil militar MApN
specializarea: matematică-informatică


Editura CARMINIS

Marius Burtea Georgeta Burtea

# MATEMATICĂ

## Manual pentru clasa a XII-a

## $\mathcal{M}_1$

**Trunchi comun**

**+**

**curriculum diferențiat**

EDITURA CARMINIS
PITEȘTI

„Manualul a fost aprobat prin Ordinul ministrului Educaţiei, Cercetării şi Tineretului nr. 1262/32 din 06.06.2007 în urma evaluării calitative şi este realizat în conformitate cu programa analitică aprobată prin Ordin al ministrului Educaţiei şi Cercetării nr. 5959 din 22.12.2006“

Copertă: **Giorgian Gînguţ**

---

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale a României
BURTEA, MARIUS
Matematică M1 : trunchi comun şi curriculum diferenţiat : clasa a XII-a /
Marius Burtea, Georgeta Burtea. – Piteşti: Carminis Educaţional, 2007
328 p.; il.; 24 cm

ISBN 978-973-123-018-4

I. Burtea, Georgeta

51(075.35)

---



Referenţi: **Prof. Gr. I Marin Ionescu**, Colegiul Naţional „I. C. Brătianu“, Piteşti
**Prof. Gr. I Georgică Marineci**, Colegiul Naţional „I. C. Brătianu“, Piteşti

Redactor: **Carmen Joldescu**
Tehnoredactori: **Alina Pieptea, Marius Hîrzoiu**
Corectură: **Marius Burtea, Georgeta Burtea**
Tehnoredactare computerizată: **Editura CARMINIS**

Tiparul executat la **S.C. TIPARG S.A. PITEŞTI**
Comenzile se primesc la
tel./fax: **0248/253022, 252467** sau pe adresa: **Editura CARMINIS**
str. Exerciţiu, bl. D 22, sc. B, ap. 1, cod 110242, Piteşti, jud. Argeş
www.carminis.ro
e-mail: editura_carminis@yahoo.com

**ISBN 978-973-123-018-4**

# PREFAȚĂ

Manualul are la bază PROGRAMA 1 și se adresează elevilor de liceu din clasa a XII-a de la următoarele filiere, profiluri și specializări:

**• filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică: 2 ore/săptămână (TC) + 2 ore/săptămână (CD);**

**• filiera vocațională, profilul militar MApN, specializarea matematică-informatică: 4 ore/săptămână (TC).**

Acest manual se aplică și la clasa a XIII-a, ciclul superior al liceului, filiera tehnologică, ruta progresivă de calificare profesională.

El este conceput pe baza noului curriculum orientat pe formarea de competențe, valori și aptitudini dobândite de elevi în actul învățării, elemente care-i vor conduce spre înțelegerea diverselor dimensiuni ale realității cotidiene și spre aplicarea metodelor specifice matematicii în cele mai diverse domenii.

Manualul este alcătuit din două părți distincte:

Partea I, ELEMENTE DE ALGEBRĂ, cuprinde următoarele capitole: *Grupuri, Inele și corpuri, Inele de polinoame.*

Partea a II-a, intitulată ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ, este formată din următoarele capitole: *Primitive (antiderivate), Integrala definită* și *Aplicații ale integralei definite.*

Partea teoretică a manualului este redată într-o manieră directă, definind noile concepte matematice și apoi prezentând aplicații care le impun, sau într-o manieră problematizată, pornind de la situații-problemă a căror rezolvare motivează introducerea și aprofundarea diferitelor noțiuni și metode de lucru.

Partea aplicativă a manualului este constituită din următoarele elemente care conferă acestuia o notă particulară, atractivă pentru cel care îl utilizează:

• exerciții și probleme rezolvate, concepute pentru a explica și exemplifica modul de utilizare a noilor noțiuni, diferite metode și procedee de rezolvare;

• teste de evaluare plasate după grupuri de teme sau la sfârșit de capitol;

• seturi de exerciții și probleme propuse, structurate pe grade de dificultate în trei categorii:

**a)** Exerciții și probleme pentru aplicarea și exersarea noțiunilor fundamentale dintr-o unitate didactică, notate cu simbolul „E“, incluse în setul denumit EXERSARE.

**b)** Exerciții și probleme pentru aprofundarea noțiunilor fundamentale studiate, notate cu simbolul „A“. Parcurgerea acestui

set de probleme dă posibilitatea aplicării noțiunilor învățate în contexte variate, realizând conexiuni intra- și extradisciplinare.

**c)** Exerciții și probleme notate cu simbolul „D“ din setul DEZVOLTARE, pentru inițierea unui studiu mai lărgit al unor teme, având un nivel ridicat de dificultate. Exercițiile de dezvoltare vizează aspecte mai profunde ale unor noțiuni și pot fi folosite pentru pregătirea olimpiadelor școlare, pentru alcătuirea de referate și comunicări pe baza unei bibliografii recomandate.

Pe parcursul manualului sunt întâlnite diferite modalități complementare de evaluare și studiu:

• *Temă* – care solicită demonstrarea unor rezultate matematice urmând modele din cadrul unei anumite lecții sau conține aplicații imediate ale unor modele de rezolvare oferite în cadrul exercițiilor rezolvate. Acestea pot fi parcurse în clasă, individual sau pe grupe de elevi.

• *Temă de studiu* și *Temă de proiect* – care au drept scop continuarea și aprofundarea unor idei inițiate în cadrul unei lecții.

Aceste teme de studiu sunt menite să-i stimuleze pe elevi, individual sau în grup, în studiul matematicii, în dezvoltarea creativității și capacității de investigare. De asemenea, ele pot constitui subiectul unor referate care să completeze portofoliile elevilor.

• *Teme de sinteză* – destinate sistematizării și recapitulării principalelor teme din programa școlară, în vederea pregătirii examenului de bacalaureat.

Manualul se încheie cu INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI date pentru un număr semnificativ de exerciții și probleme propuse.

***Autorii***

# ELEMENTE DE ALGEBRĂ

# I. GRUPURI

## 1 Legi de compoziție pe o mulțime

### 1.1. Definiții și exemple

Din studiul diferitelor operații întâlnite până acum (adunarea și înmulțirea numerelor, compunerea funcțiilor, adunarea și înmulțirea matricelor etc.) se pot desprinde concluziile:

– există o mare diversitate atât în ceea ce privește natura mulțimilor pe care sunt definite aceste operații (numere, funcții, matrice, vectori, șiruri, perechi ordonate...), cât și în ceea ce privește regulile specifice după care se operează cu elementele acestor mulțimi;

– operațiile algebrice întâlnite au o serie de proprietăți comune, indiferent de natura elementelor asupra cărora operează (comutativitate, asociativitate etc.).

Reținând aspectele esențiale ale operațiilor, în acest capitol se va face o prezentare a acestora într-o formă generală prin intermediul conceptului de lege de compoziție, concept care dă posibilitatea folosirii metodei axiomatice în algebră.

❖ **DEFINIȚII**

Fie M o mulțime nevidă.

- O aplicație $\varphi : M \times M \to M, (x, y) \to \varphi(x, y)$ se numește **lege de compoziție** (operație algebrică) pe mulțimea M.
- Elementul $\varphi(x, y) \in M$, care corespunde prin aplicația $\varphi$ perechii ordonate $(x, y) \in M \times M$ se numește **compusul** lui x cu y prin legea de compoziție $\varphi$.

☞ ***Exemple de legi de compoziție***

- Operația de adunare „ + “ și operația de înmulțire „ · “ pe mulțimile de numere $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$:

„ + “: $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}, (x, y) \to x + y,$

„ · “: $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}, (x, y) \to x \cdot y,$

„ + “: $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, (x, y) \to x + y,$

„ · “: $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, (x, y) \to x \cdot y,$ etc.

- Operația de adunare „+" pe mulțimea $\mathcal{V}$ a vectorilor din plan:
  „+": $\mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}$, $(\vec{a}, \vec{b}) \to \vec{a} + \vec{b}$.
- Operațiile de reuniune „∪", intersecție „∩", diferență „\", diferență simetrică „Δ", pe mulțimea $\mathcal{P}(M)$ a părților (submulțimilor) unei mulțimi M:
  „ ∪ ": $\mathcal{P}(M) \times \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(M)$, $(A, B) \to A \cup B$,
  „ ∩ ": $\mathcal{P}(M) \times \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(M)$, $(A, B) \to A \cap B$, etc.
- Operația de compunere „∘" a funcțiilor pe mulțimea $\mathcal{F}(M) = \{f \mid f : M \to M\}$:
  „∘": $\mathcal{F}(M) \times \mathcal{F}(M) \to \mathcal{F}(M)$, $(f, g) \to f \circ g$.

Legile de compoziție sunt date în diferite notații:
• În notație aditivă se scrie $\varphi(x, y) = x + y$; elementul $x + y \in M$ se numește **suma** lui x cu y, iar operația φ se numește **adunare**.
• În notație multiplicativă se scrie $\varphi(x, y) = x \cdot y$; elementul $x \cdot y \in M$ se numește **produsul** lui x cu y, iar operația φ se numește **înmulțire**.
Deseori, dacă $\varphi : M \times M \to M$ este o lege de compoziție (operație algebrică) pe mulțimea M, în loc de notația $\varphi(x, y)$ se folosesc notațiile $x \,\varphi\, y$, $x \circ y$, $x * y$, $x \top y$, $x \perp y$ etc.

## *Exercițiu rezolvat*

☒ Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se definește operația algebrică „ ⊤ ", astfel:
$\top : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(x, y) \to x \top y = xy - x - y$.

**a)** Să se calculeze $2 \top 3$, $5 \top (-3)$, $(-6) \top (-8)$.

**b)** Pentru care elemente $x \in \mathbb{R}$, avem $x \top 2 = 8$?

**c)** Să se rezolve ecuația $x \top (x+1) = 1$.

<u>*Soluție*</u>

**a)** $2 \top 3 = 2 \cdot 3 - 2 - 3 = 1$; $5 \top (-3) = 5 \cdot (-3) - 5 - (-3) = -17$, iar $(-6) \top (-8) = (-6) \cdot (-8) - (-6) - (-8) = 62$.

**b)** Avem: $x \top 2 = x \cdot 2 - x - 2 = x - 2$. Din egalitatea $x - 2 = 8$ se obține $x = 10$.

**c)** Avem: $x \top (x+1) = x(x+1) - x - (x+1) = x^2 - x - 1$. Rezultă ecuația $x^2 - x - 2 = 0$ cu soluțiile $x_1 = -1$, $x_2 = 2$. Așadar: $(-1) \top 0 = +1$ și $2 \top 3 = +1$.

## 1.2. Adunarea și înmulțirea modulo n

Fie $n \in \mathbb{N}^*$ un număr natural și $a \in \mathbb{Z}$. Din teorema împărțirii cu rest a numerelor întregi rezultă că există și sunt unice numerele $q \in \mathbb{Z}$ și $r \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ cu proprietatea $a = nq + r$.

Numărul natural r care reprezintă restul împărțirii lui a la n, se notează **a mod n** (se citește „a modulo n“) și se numește redusul modulo n al numărului a.

Așadar, $r = a \bmod n.$

Astfel, dacă n = 6, atunci:

$15 \bmod 6 = 3,\ 5 \bmod 6 = 5,\ (-10) \bmod 6 = 2.$

Pe mulțimea $\mathbb{Z}$ definim următoarele legi de compoziție:

**a)** $\oplus : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ a \oplus b = (a+b) \bmod n,$ numită **adunarea modulo n**.

$a \oplus b$ se numește **suma modulo n** a lui a cu b.

**b)** $\odot : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ a \odot b = (ab) \bmod n,$ numită **înmulțirea modulo n**.

$a \odot b$ se numește **produsul modulo n** al lui a cu b.

Astfel, pentru n = 8, avem:

$6 \oplus 10 = (6+10) \bmod 8 = 16 \bmod 8 = 0;$

$7 \oplus 12 = (7+12) \bmod 8 = 19 \bmod 8 = 3;$

$4 \odot 3 = (4 \cdot 3) \bmod 8 = 12 \bmod 8 = 4;$

$(-2) \odot 5 = [(-2) \cdot 5] \bmod 8 = (-10) \bmod 8 = 6.$

❑ **TEMĂ**

**Pentru n = 6, calculați:**

| | |
|---|---|
| $2 \oplus 5,$ | $2 \odot 5,$ |
| $16 \oplus 9,$ | $9 \odot 4,$ |
| $(-2) \oplus 3,$ | $(-5) \odot 5,$ |
| $(-7) \oplus (-9),$ | $(-9) \odot (-5),$ |
| $(2 \oplus 9) \odot 3,$ | $(3 \odot 7) \oplus 8.$ |

## 1.3. Adunarea și înmulțirea claselor de resturi modulo n

Fie $n \in \mathbb{N}^*$ un număr natural fixat. Pentru $a \in \mathbb{Z}$ notăm $\hat{a} = \{a + nk \mid k \in \mathbb{Z}\}$ și r = a mod n restul împărțirii lui a la n.

Din teorema împărțirii cu rest, rezultă că există $q \in \mathbb{Z}$ astfel încât $a = nq + r$.

Atunci, $\hat{a} = \{a + nk \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{r + nq + nk \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{r + nh \mid h \in \mathbb{Z}\} = \hat{r}.$

Așadar, în determinarea mulțimii $\hat{a}$ este esențial să cunoaștem restul împărțirii lui a la n.

Mulțimea $\hat{a}$ se numește **clasa de resturi modulo n** a lui a.

Deoarece resturile obținute la împărțirea cu n a numerelor întregi pot fi 0, 1, 2, ... , n – 1, rezultă că există numai n clase de resturi modulo n distincte două câte două și acestea pot fi considerate $\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \ldots, \widehat{n-1}.$

Mulțimea claselor de resturi modulo n se notează cu $\mathbb{Z}_n$ și putem scrie $\mathbb{Z}_n = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \ldots, \widehat{n-1}\}.$

Pe mulțimea $\mathbb{Z}_n$ se definesc următoarele legi de compoziție:

**a)** „+“: $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n$, $\hat{a} + \hat{b} = \widehat{a \oplus b}$, numită **adunarea claselor de resturi** modulo n, iar $\hat{a} + \hat{b}$ se numește **suma** claselor $\hat{a}$ și $\hat{b}$;

**b)** „·“: $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n$, $\hat{a} \cdot \hat{b} = \widehat{a \odot b}$, numită **înmulțirea claselor de resturi** modulo n, iar $\hat{a} \cdot \hat{b}$ se numește **produsul** claselor $\hat{a}$ și $\hat{b}$.

☞ ***Exemple***

- Fie $\mathbb{Z}_4 = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}\}$. Atunci avem: $\hat{2} + \hat{1} = \hat{3}$; $\hat{2} + \hat{3} = \hat{1}$; $\hat{2} + \hat{2} = \hat{0}$ etc.

  De asemenea: $\hat{2} \cdot \hat{2} = \hat{0}$; $\hat{2} \cdot \hat{3} = \hat{2}$; $\hat{3} \cdot \hat{3} = \hat{1}$.
- În $\mathbb{Z}_5 = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}\}$ avem: $\hat{2} + \hat{1} = \hat{3}$, $\hat{2} + \hat{3} = \hat{0}$, $\hat{2} + \hat{2} = \hat{4}$, $\hat{4} + \hat{3} = \hat{2}$ etc.

  De asemenea: $\hat{2} \cdot \hat{2} = \hat{4}$, $\hat{2} \cdot \hat{3} = \hat{1}$, $\hat{3} \cdot \hat{3} = \hat{4}$, $\hat{4} \cdot \hat{3} = \hat{2}$ etc.

## *Exerciții rezolvate*

☒ **1.** Să se calculeze în $\mathbb{Z}_7$:

**a)** $(\hat{2})^3$; **b)** $(\hat{3} \cdot \hat{4}) \cdot \hat{6}$; **c)** $(\hat{3})^4 + (\hat{5})^3$.

*Soluție*

Avem: **a)** $(\hat{2})^3 = \hat{2} \cdot \hat{2} \cdot \hat{2} = \hat{4} \cdot \hat{2} = \hat{1}$; **b)** $(\hat{3} \cdot \hat{4}) \cdot \hat{6} = \hat{5} \cdot \hat{6} = \hat{2}$;

**c)** $(\hat{3})^4 + (\hat{5})^3 = \hat{3} \cdot \hat{3} \cdot \hat{3} \cdot \hat{3} + \hat{5} \cdot \hat{5} \cdot \hat{5} = \hat{2} \cdot \hat{3} \cdot \hat{3} + \hat{4} \cdot \hat{5} = \hat{6} \cdot \hat{3} + \hat{6} = \hat{4} + \hat{6} = \hat{3}$.

☒ **2.** Să se rezolve în $\mathbb{Z}_4$ ecuația $\hat{2}x^2 + \hat{2}x = \hat{0}$.

*Soluție*

Soluțiile ecuației pot fi doar elemente ale mulțimii $\{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}\}$.

Fie $f(x) = \hat{2}x^2 + \hat{2}x$. Avem:

- $f(\hat{0}) = \hat{2} \cdot \hat{0} + \hat{2} \cdot \hat{0} = \hat{0} + \hat{0} = \hat{0}$;
- $f(\hat{1}) = \hat{2} \cdot \hat{1} + \hat{2} \cdot \hat{1} = \hat{2} + \hat{2} = \hat{0}$;
- $f(\hat{2}) = \hat{2} \cdot \hat{0} + \hat{2} \cdot \hat{2} = \hat{0} + \hat{0} = \hat{0}$;
- $f(\hat{3}) = \hat{2} \cdot \hat{1} + \hat{2} \cdot \hat{3} = \hat{2} + \hat{2} = \hat{0}$.

❑ **TEMĂ**

**Rezolvați ecuațiile:**

**a)** $\hat{3}x + \hat{5} = \hat{0}$, **în** $\mathbb{Z}_6$;

**b)** $\hat{3}x^2 + \hat{3}x = \hat{0}$, **în** $\mathbb{Z}_6$;

**c)** $\hat{2}x^3 + \hat{3}x + \hat{2} = \hat{0}$, **în** $\mathbb{Z}_4$.

În concluzie, soluțiile ecuației date sunt $\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}$. După cum se observă, ecuațiile de gradul 2, pe mulțimi diferite de cele uzuale, pot avea mai mult de două soluții.

## 1.4. Parte stabilă. Lege de compoziție indusă

Fie M o mulțime nevidă și „$\circ$“: $M \times M \to M$ o lege de compoziție pe M.

### ❖ DEFINIȚIE

• O submulțime $S \subset M$ se numește **parte stabilă** a lui M în raport cu legea de compoziție „$\circ$“ dacă: $\forall$ x, y $\in$ S implică $x \circ y \in S$.

Pentru cazul S = M se spune că M este parte stabilă în raport cu legea de compoziție „$\circ$“.

☞***Exemple***

- Mulțimile de numere $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ sunt părți stabile ale lui $\mathbb{R}$ în raport cu operațiile de adunare și de înmulțire a numerelor reale.
- Mulțimile $p\mathbb{N} = \{px \mid x \in \mathbb{N}\}$, cu p $\in$ $\mathbb{N}$ sunt părți stabile ale lui $\mathbb{N}$ în raport cu operațiile de adunare și de înmulțire a numerelor naturale.
- Fie $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ mulțimea matricelor pătrate cu elemente din mulțimea $\mathbb{C}$. Submulțimea $S \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ a matricelor inversabile este parte stabilă a lui $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ în raport cu înmulțirea matricelor.

### *Exerciții rezolvate*

☒ **1.** Fie $H \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, $H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \middle| \ a^2 + b^2 = 1 \right\}$. Să se arate că H este parte stabilă a mulțimii $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ în raport cu înmulțirea matricelor.

<u>*Soluție*</u>

Fie A, B $\in$ H, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$ și $a^2 + b^2 = 1, x^2 + y^2 = 1$. Se obține: $AB = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax - by & ay + bx \\ -ay - bx & -by + ax \end{pmatrix}$. (1)

Folosind proprietatea $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$, rezultă că: $\det(AB) = (a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = 1$ și astfel $(ax - by)^2 + (ay + bx)^2 = 1$. (2)

Din relațiile (1) și (2) rezultă că AB $\in$ H, deci H este parte stabilă a mulțimii $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ în raport cu înmulțirea.

☒ **2.** Să se arate că mulțimea $\mathcal{R}_n = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ este parte stabilă a lui $\mathbb{Z}$ în raport cu adunarea modulo n și înmulțirea modulo n.

*Soluție*

Dacă $a, b \in \mathscr{R}_n$, atunci, din definiție, $a \oplus b$ și $a \odot b$ reprezintă restul împărțirii numerelor $a + b$ și $a \cdot b$ la n. În concluzie, $a \oplus b$ și $a \odot b$ sunt elemente ale lui $\mathscr{R}_n$.

Dacă H este parte stabilă a lui M în raport cu legea de compoziție $\varphi : M \times M \to M$, atunci pe mulțimea H se poate defini o lege de compoziție $\psi : H \times H \to H$, considerând $\psi(x, y) = \varphi(x, y), \forall\ x, y \in H$.

Legea de compoziție $\psi$ se numește **legea de compoziție indusă** pe mulțimea H de către legea de compoziție $\varphi$.

Pentru simplificarea scrierii, se obișnuiește să se folosească aceeași notație pentru legea de compoziție pe M și legea de compoziție indusă pe H.

## 1.5. Tabla unei legi de compoziție

Fie M o mulțime finită, $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ și $\varphi : M \times M \to M$ o lege de compoziție pe M.

Legea de compoziție $\varphi$ poate fi descrisă printr-un tablou cu n linii și n coloane corespunzător elementelor $a_1, a_2, \ldots, a_n$. La intersecția liniei i cu coloana j se află elementul $\varphi(a_i, a_j)$.

| $\varphi$ | $a_1$ | $a_2$ | … | $a_j$ | … | $a_n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_1$ | | | | ⋮ | | |
| $a_2$ | | | | ⋮ | | |
| ⋮ | | | | ⋮ | | |
| $a_i$ | … | … | … | $\varphi(a_i, a_j)$ | … | … |
| ⋮ | | | | ⋮ | | |
| $a_n$ | | | | ⋮ | | |

Acest tablou se numește **tabla legii de compoziție** sau **tabla lui Cayley**.

Tabla unei legi de compoziție are un rol deosebit în perfecționarea calculelor algebrice, precum și în verificarea unor proprietăți ale legii de compoziție.

### *Exerciții rezolvate*

☒ **1.** Fie $H = \{z \in \mathbb{C} \mid z^4 = 1\}$. Să se arate că H este parte stabilă a mulțimii $\mathbb{C}$ în raport cu înmulțirea numerelor complexe.

*Soluție*

Ecuația $z^4 = 1$ se scrie $(z^2 - 1)(z^2 + 1) = 0$, de unde se obține $z \in \{-1, 1, i, -i\} = H$. Alcătuim tabla operației de înmulțire pe H.

| $\cdot$ | $-1$ | $1$ | $-i$ | $i$ |
|---|---|---|---|---|
| $-1$ | $1$ | $-1$ | $i$ | $-i$ |
| $1$ | $-1$ | $1$ | $-i$ | $i$ |
| $-i$ | $i$ | $-i$ | $-1$ | $1$ |
| $i$ | $-i$ | $i$ | $1$ | $-1$ |

După cum se observă din tabla operației, toate rezultatele obținute în urma compunerii elementelor aparțin mulțimii H. În concluzie, mulțimea H este parte stabilă a lui $\mathbb{C}$ în raport cu înmulțirea.

☒ **2.** Să se alcătuiască tablele operațiilor de adunare și de înmulțire modulo 4 pe $\mathscr{R}_4$ și de adunare și de înmulțire pe mulțimea claselor de resturi $\mathbb{Z}_4$.

<u>Soluție</u>

Având în vedere modul în care s-au definit operațiile pe mulțimile $\mathscr{R}_4$ și $\mathbb{Z}_4$, avem:

| $\oplus$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 1 | 1 | 2 | 3 | 0 |
| 2 | 2 | 3 | 0 | 1 |
| 3 | 3 | 0 | 1 | 2 |

| $\odot$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 2 | 0 | 2 | 0 | 2 |
| 3 | 0 | 3 | 2 | 1 |

| $+$ | $\hat{0}$ | $\hat{1}$ | $\hat{2}$ | $\hat{3}$ |
|---|---|---|---|---|
| $\hat{0}$ | $\hat{0}$ | $\hat{1}$ | $\hat{2}$ | $\hat{3}$ |
| $\hat{1}$ | $\hat{1}$ | $\hat{2}$ | $\hat{3}$ | $\hat{0}$ |
| $\hat{2}$ | $\hat{2}$ | $\hat{3}$ | $\hat{0}$ | $\hat{1}$ |
| $\hat{3}$ | $\hat{3}$ | $\hat{0}$ | $\hat{1}$ | $\hat{2}$ |

| $\cdot$ | $\hat{0}$ | $\hat{1}$ | $\hat{2}$ | $\hat{3}$ |
|---|---|---|---|---|
| $\hat{0}$ | $\hat{0}$ | $\hat{0}$ | $\hat{0}$ | $\hat{0}$ |
| $\hat{1}$ | $\hat{0}$ | $\hat{1}$ | $\hat{2}$ | $\hat{3}$ |
| $\hat{2}$ | $\hat{0}$ | $\hat{2}$ | $\hat{0}$ | $\hat{2}$ |
| $\hat{3}$ | $\hat{0}$ | $\hat{3}$ | $\hat{2}$ | $\hat{1}$ |

☒ **3.** Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se consideră legea de compoziție $x \circ y = xy + x + y$, $\forall\ x, y \in \mathbb{R}$. Să se arate că mulțimea $M = [-2, 0]$ este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea de compoziție „ $\circ$ ".

<u>Soluție</u>

Trebuie arătat că dacă $x, y \in [-2, 0]$, atunci $x \circ y \in [-2, 0]$. Deoarece $x, y \in [-2, 0]$, rezultă că $-2 \le x \le 0$, $-2 \le y \le 0$ sau $-1 \le x + 1 \le 1$, $-1 \le y + 1 \le 1$ și se obțin inegalitățile $|x+1| \le 1$, $|y+1| \le 1$. Prin înmulțire, avem inegalitatea $|(x+1)(y+1)| \le 1$, care se scrie sub forma $-1 \le (x+1)(y+1) \le 1$. După reduceri se obține: $-2 \le xy + x + y \le 0$, deci $x \circ y \in [-2, 0]$.

# EXERCIȚII ȘI PROBLEME

## EXERSARE

**E1.** Pe mulțimea $\mathbb{Z}$ se definește operația algebrică „$\circ$" astfel: $x \circ y = 2x + y - 3$, $\forall x, y \in \mathbb{Z}$.

a) Să se calculeze $4 \circ 7$, $8 \circ (-1)$, $(-8) \circ 3$ și $3 \circ (-8)$.

b) Să se afle valorile $x \in \mathbb{Z}$ pentru care $x \circ (3x - 1) = 6$.

c) Să se rezolve ecuația $(x+1) \circ 3 = 5 \circ (x^2 - 8)$.

**E2.** Pe mulțimea $\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{R} \right\}$ definim operația algebrică $A \perp B = 3A - 2B$, $\forall A, B \in \mathcal{M}$.

a) Să se arate că $I_2 \in \mathcal{M}$.

b) Să se calculeze $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

c) Să se determine $a \in \mathbb{R}$, știind că $\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 1 & a^2 \\ a^2 & 1 \end{pmatrix} = I_2$.

**E3.** Să se calculeze:

a) 18 mod 5; 28 mod 6; 17 mod 8; $(-3)$ mod 4;

b) $5 \oplus 4$; $6 \oplus 11$; $(-2) \oplus 5$; $(-4) \oplus (-13)$, dacă $n = 9$;

c) $2 \odot 7$; $5 \odot 8$; $(-3) \odot 17$; $(-5) \odot (-11)$, dacă $n = 10$.

**E4.** Să se calculeze:

a) $\widehat{23}, \widehat{21}, \hat{9}, \widehat{-3}, \widehat{-7}$ în $\mathbb{Z}_3$;

b) $\hat{2} + \widehat{11}, \hat{3} + \hat{7}, \hat{5} + \hat{9}$ în $\mathbb{Z}_4$;

c) $\hat{2} \cdot \hat{4}, \hat{4} \cdot \hat{3}, (\hat{3})^3, (\hat{5})^4$ în $\mathbb{Z}_6$;

d) $(\hat{2} + \hat{3}) \cdot (\hat{4} + \hat{5}) \cdot (\hat{3} + \hat{6})$ în $\mathbb{Z}_7$.

**E5.** Să se rezolve ecuațiile:

a) $\hat{2}x + \hat{1} = \hat{0}$, în $\mathbb{Z}_3$;

b) $x^2 + \hat{1} = \hat{0}$, în $\mathbb{Z}_5$;

c) $\hat{3}x^2 - \hat{5}x + \hat{2} = \hat{0}$, în $\mathbb{Z}_4$;

d) $x^3 + \hat{2}x + \hat{3} = \hat{0}$, în $\mathbb{Z}_5$.

**E6.** Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se definesc operațiile algebrice $x \circ y = x + y - xy$ și $x \top y = x - y + 2xy$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$. Să se rezolve:

a) ecuația $x \circ x = x \top x$;

b) sistemul $\begin{cases} (x + 3y) \circ 3 = -19 \\ (x - 2y) \top 2 = -22 \end{cases}$.

**E7.** Pe mulțimea $M = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ se consideră legea de compoziție $x \circ y = |x - y|$, $\forall x, y \in M$. Să se alcătuiască tabla operației și să se arate că M este parte stabilă în raport cu această lege de compoziție.

**E8.** Să se alcătuiască tabla operației „$\circ$" pe mulțimea M și să se studieze dacă mulțimea este parte stabilă în raport cu „$\circ$", dacă:

a) $M = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ divide } 12\}$, $x \circ y = \text{c.m.m.d.c.}(x, y)$;

b) $M = \{2, 3, 4, 5\}$, $x \circ y = \min(x, y)$;

c) $M = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $x \circ y = \max(x, y)$.

**E9.** Să se arate că mulțimea M este parte stabilă în raport cu legea de compoziție specificată:

a) $M = [2, +\infty)$, $x \circ y = xy - 2(x + y) + 6$;

b) $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R} \right\}$, în raport cu adunarea matricelor;

c) $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{Q}, a^2 - 2b^2 = 1 \right\}$, în raport cu înmulțirea matricelor.

**E10.** Pe mulțimea $M = \{1, 2, 3, 4\}$ se consideră operația algebrică „∘" a cărei tablă este dată mai jos:

| ∘ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 3 | 4 | 1 |
| 2 | 1 | 3 | 4 | 2 |
| 3 | 2 | 1 | 3 | 4 |
| 4 | 4 | 3 | 2 | 1 |

a) Să se determine $x = 1 \circ (2 \circ 3)$, $y = 4 \circ (3 \circ 2)$, $z = (1 \circ 2) \circ (3 \circ 4)$.

b) Să se rezolve ecuațiile $x \circ 2 = 4$, $4 \circ x = 2$ și $x \circ 2 \circ x = 1$.

c) Să se rezolve sistemele de ecuații: $\begin{cases} x \circ 2 = y \\ y \circ 2 = x \end{cases}$ și $\begin{cases} x \circ y = 1 \\ (x+1) \circ y = 1 \end{cases}$.

**E11.** Fie $\mathcal{M} = \left\{ A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{C} \right\}$ și legea de compoziție $X \perp Y = X + Y - I_2$, $\forall X, Y \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ definită pe mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

Să se arate că mulțimea $\mathcal{M}$ este parte stabilă a mulțimii $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ în raport cu operația de înmulțire a matricelor și în raport cu operația „ ⊥ ".

## APROFUNDARE

**A1.** Să se determine mulțimile $M \subset \mathbb{Z}_4$, care sunt părți stabile ale lui $\mathbb{Z}_4$ în raport cu operația de adunare.

**A2.** Să se arate că mulțimea M este parte stabilă în raport cu operația specificată:

a) $M = (a, +\infty)$, $x \circ y = xy - a(x+y) + a^2 + a$;

b) $M = [4, 6]$, $x \circ y = xy - 5(x+y) + 30$;

c) $M = (-1, 1)$, $x \circ y = \dfrac{x+y}{1+xy}$.

**A3.** Pe mulțimea $M = (2, +\infty)$ se consideră legea de compoziție:

$x \circ y = \dfrac{xy - 2}{x + y - 3}$, $\forall x, y \in M$.

Să se arate că M este parte stabilă în raport cu „ ∘ ".

**A4.** Se consideră mulțimea $\mathbb{Z}[\sqrt{3}] = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$.

Să se arate că:

a) mulțimea $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ este parte stabilă în raport cu adunarea și înmulțirea;

b) mulțimea $M = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Z}, a^2 - 3b^2 = 1\}$ este parte stabilă a mulțimii $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ în raport cu înmulțirea.

**A5.** Se consideră funcțiile $f_1, f_2, f_3, f_4 : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f_1(x) = x$, $f_2(x) = \dfrac{1}{x}$, $f_3(x) = -x$, $f_4(x) = -\dfrac{1}{x}$. Să se arate că mulțimea $M = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ este parte stabilă în raport cu compunerea funcțiilor.

**A6.** Fie $M = (2, +\infty)$ și legea de compoziție pe M: $x \circ y = xy - 2x - 2y + a$, $\forall x, y \in M$.

a) Să se determine valoarea minimă a lui $a \in \mathbb{R}$, astfel încât M să fie parte stabilă în raport cu „∘".

b) Să se rezolve ecuația $4 \circ x = 8$.

**c) Să se rezolve sistemul:**
$\begin{cases}(x+2)\circ(y-3)=46\\(2x+1)\circ(y+1)=59\end{cases}$, **pentru a = 50.**

**A7. Să se studieze dacă mulțimea M este parte stabilă a lui $\mathbb{C}$ în raport cu înmulțirea:**

**a)** $M=\{z\in\mathbb{C}\mid z^3=1\}$;

**b)** $M=\{z\in\mathbb{C}\mid z=\bar{z}\}$;

**c)** $M=\{z\in\mathbb{C}\mid z^2=\bar{z}\}$;

**d)** $M=\{z\in\mathbb{C}\mid \mathrm{Re}(z)=0\}$.

**A8. Să se determine mulțimile finite $M\subset\mathbb{R}$, care sunt părți stabile ale lui $\mathbb{R}$ în raport cu operația de înmulțire. Aceeași problemă pentru mulțimea $\mathbb{C}$.**

**A9. Fie M o mulțime cu 3 elemente. Să se determine numărul legilor de compoziție care se pot defini pe mulțimea M. Generalizare.**

# 2 Proprietăți ale legilor de compoziție

## 2.1. Proprietatea de comutativitate

Fie M o mulțime nevidă.

### ❖ DEFINIȚIE

• Legea de compoziție „$\circ$": $M\times M\to M,\ (x,y)\to x\circ y$ se numește **comutativă** dacă $x\circ y=y\circ x,\ \forall x,\ y\in M$.

☞ ***Exemple de legi de compoziție comutative***

- Adunarea și înmulțirea pe mulțimile de numere $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$. Avem:
  $x+y=y+x$ și $x\cdot y=y\cdot x,\ \forall\ x,\ y$.
- Reuniunea, intersecția și diferența simetrică pe mulțimea $\mathcal{P}(M)$ a submulțimilor mulțimii M:
  $A\cup B=B\cup A,\ A\cap B=B\cap A,\ A\Delta B=B\Delta A,\ \forall\ A,\ B\in\mathcal{P}(M)$.
- Adunarea matricelor pe mulțimea $\mathcal{M}_{m,\ n}(\mathbb{C})$:
  $A+B=B+A,\ A,\ B\in\mathcal{M}_{m,\ n}(\mathbb{C})$.

☞ ***Exemple de legi de compoziție necomutative***

- Scăderea pe mulțimile $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$.
- Scăderea pe mulțimea matricelor $\mathcal{M}_{m,\ n}(\mathbb{C})$.
- Diferența mulțimilor pe mulțimea $\mathcal{P}(A)$.
- Compunerea funcțiilor pe mulțimea $\mathcal{F}(M)=\{f\mid f:M\to M\}$, dacă M are cel puțin două elemente.

➲ **OBSERVAȚII**

**1.** Dacă $\varphi : M \times M \to M$ este lege de compoziție comutativă pe mulțimea M și $H \subset M$ este parte stabilă a lui M în raport cu $\varphi$, atunci operația indusă pe H de legea $\varphi$ este comutativă. Se spune că proprietatea de comutativitate este ereditară.

**2.** Dacă mulțimea M este finită, comutativitatea unei operații $\varphi$ pe M poate fi verificată pe tabla operației. Legea de compoziție este comutativă dacă tabla legii este simetrică față de diagonala principală a acesteia.

### *Exercițiu rezolvat*

☒ Pe mulțimea $\mathbb{Z}$ a numerelor întregi se definește legea de compoziție $x \circ y = xy + 2x + ay$.

Să se determine $a \in \mathbb{Z}$ pentru care legea de compoziție este comutativă.

*Soluție*

Avem: $y \circ x = y \cdot x + 2y + ax$. Din egalitatea $x \circ y = y \circ x$ se obține $x \cdot y + 2x + ay = y \cdot x + 2y + ax,\ \forall\ x, y \in \mathbb{Z}$. Din faptul că înmulțirea și adunarea numerelor întregi sunt legi de compoziție comutative se obține $(a-2)(x-y) = 0,\ \forall\ x, y \in \mathbb{Z}$, de unde $a = 2$.

➲ **OBSERVAȚIE**

- Multe legi de compoziție se definesc cu ajutorul altor legi de compoziție. În asemenea cazuri, în demonstrarea proprietăților legii de compoziție considerate, intervin în mod esențial proprietățile legilor de compoziție folosite în definirea acestora.

## 2.2. Proprietatea de asociativitate

Fie M o mulțime nevidă.

❖ **DEFINIȚIE**

- O lege de compoziție $M \times M \to M,\ (x, y) \to x \circ y$ se numește **asociativă** dacă $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z),\ \forall x, y, z \in M$.

☞ ***Exemple de legi asociative***

- Adunarea și înmulțirea pe mulțimile de numere $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$: $(x+y)+z = x+(y+z)$ și $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$, pentru oricare x, y, z.

- Reuniunea, intersecția și diferența simetrică pe mulțimea părților unei mulțimi M: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ și $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$, $\forall A, B, C \in \mathscr{P}(M)$.
- Compunerea funcțiilor pe mulțimea $\mathscr{F}(M) = \{f \mid f : M \to M\}$: $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$, $\forall f, g, h \in \mathscr{F}(M)$.
- Adunarea și înmulțirea matricelor pe mulțimea $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$: $A + (B + C) = (A + B) + C$, $\forall A, B, C \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ și $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$, $\forall A, B, C \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

☞ ***Exemple de legi neasociative***

- Scăderea pe mulțimile de numere $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$. De exemplu: $2 - (3 - 1) = 0$, iar $(2 - 3) - 1 = -2$.
- Scăderea matricelor pe mulțimea $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{C})$.
- Diferența mulțimilor pe mulțimea $\mathscr{P}(M)$.

Atunci când este valabilă proprietatea de asociativitate, nu este necesară folosirea parantezelor pentru a indica compusul a trei elemente. În acest caz este suficient să se scrie $a \circ b \circ c$, iar acest element se poate determina fie cu $(a \circ b) \circ c$, fie cu $a \circ (b \circ c)$.

În general, pentru o operație asociativă, se pot considera elemente de forma $a_1 \circ a_2 \circ \ldots \circ a_n$, acestea având aceeași valoare indiferent de gruparea termenilor cu ajutorul parantezelor.

Elementul $a_1 \circ a_2 \circ \ldots \circ a_n$ se definește recursiv astfel:

$$a_1 \circ a_2 \circ \ldots \circ a_{n-1} \circ a_n = (a_1 \circ a_2 \circ \ldots \circ a_{n-1}) \circ a_n.$$

Pentru o lege de compoziție „∘“ asociativă sunt valabile egalitățile:

- $a_1 \circ a_2 \circ \ldots \circ a_n = a_1 \circ (a_2 \circ \ldots \circ a_n)$;
- $a_1 \circ a_2 \circ \ldots \circ a_n = (a_1 \circ a_2 \circ \ldots \circ a_{k-1}) \circ (a_k \circ \ldots \circ a_n)$, unde $2 \le k \le n$.

## ➲ OBSERVAȚII

**1.** Proprietatea de asociativitate este **ereditară**, adică dacă $\varphi$ este lege de compoziție asociativă pe M și $H \subset M$ este parte stabilă a lui M în raport cu $\varphi$, atunci și legea indusă pe H de către $\varphi$ este asociativă.

**2.** Dacă $\varphi$ este lege neasociativă pe M și $H \subset M$ este o parte stabilă a lui M în raport cu $\varphi$, nu rezultă în mod necesar că legea indusă de $\varphi$ pe H este neasociativă.

☞ ***Exemplu***

- Operația de scădere pe $\mathbb{Z}$ nu este asociativă, dar este asociativă pe mulțimea $H = \{0\} \subset \mathbb{Z}$.

## *Probleme rezolvate*

☒ **1.** Pe mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ se consideră legea de compoziție „∘", dată de relația $A \circ B = A + B + AB$.

**a)** Să se arate că legea de compoziție „∘" este asociativă.

**b)** Să se determine $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

**c)** Să se determine $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

<u>*Soluție*</u>

**a)** Folosind comutativitatea adunării și asociativitatea înmulțirii matricelor, avem $(A \circ B) \circ C = (A + B + AB) \circ C = A + B + AB + C + (A + B + AB) \cdot C = A + B + C + AB + AC + BC + ABC$. Analog, $A \circ (B \circ C) = A + (B \circ C) + A \cdot (B \circ C) = A + B + C + BC + A(B + C + BC) = A + B + C + AB + AC + BC + ABC$.

Așadar, pentru oricare $A, B, C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$, $(A \circ B) \circ C = A \circ (B \circ C)$, deci legea de compoziție „∘" este asociativă.

**b)** Legea „∘" fiind asociativă, folosind a), rezultă:

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \circ \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} +$$
$$+ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & a+b+c \\ 0 & 3 \end{pmatrix} +$$
$$+ \begin{pmatrix} 1 & a+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & a+c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & b+c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & a+b+c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 4a+4b+4c \\ 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

**c)** Folosind punctul b) rezultă:

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] \circ \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 24 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 24 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} +$$
$$+ \begin{pmatrix} 7 & 24 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 28 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 52 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 80 \\ 0 & 15 \end{pmatrix}.$$

☒ **2.** Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(x, y) \to x \circ y = xy + ax + ay + b$.

**a)** Să se determine a, b $\in \mathbb{R}$, astfel încât legea de compoziție „$\circ$“ să fie asociativă.

**b)** Să se determine $\underbrace{x \circ x \circ \ldots \circ x}_{n \text{ termeni}}$, pentru a, b $\in \mathbb{R}$ determinați la a).

*Soluție*

**a)** Folosind proprietățile adunării și înmulțirii numerelor reale, pentru $\forall$ x, y, z $\in \mathbb{R}$, avem $(x \circ y) \circ z = (xy + ax + ay + b) \circ z = (xy + ax + ay + b) \cdot z +$ $+ a \cdot (xy + ax + ay + b) + az + b = xyz + axy + ayz + bz + axz + a^2x + a^2y + ab +$ $+ az + b = xyz + axy + ayz + axz + a^2x + a^2y + (a + b)z + ab + b$. Analog se obține: $x \circ (y \circ z) = xyz + axy + ayz + axz + (a + b)x + a^2y + a^2z + ab + b$.

Din egalitatea $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$, $\forall$ x, y, z $\in \mathbb{R}$ se obține că $(a^2 - a - b)(x - z) = 0$, $\forall$ x, z $\in \mathbb{R}$. Așadar, $a^2 - a - b = 0$ și astfel $x \circ y =$ $= xy + a(x + y) + a^2 - a$ sau, astfel scris, $x \circ y = (x + a)(y + a) + a$.

**b)** Vom folosi metoda inducției matematice.

Fie $t_n = x \circ x \circ \ldots \circ x$, compunerea având în total n termeni.

Rezultă $t_1 = x$, $t_2 = x \circ x = x^2 + 2ax + a^2 - a = (x + a)^2 - a$,

$t_3 = t_2 \circ x = (x + a)(t_2 + a) - a = (x + a)^3 - a$.

Presupunem că $t_k = (x + a)^k - a$.

Atunci $t_{k+1} = t_k \circ x = (x + a)(t_k + a) - a = (x + a)^{k+1} - a$.

Din principiul inducției matematice rezultă că:

$t_n = (x + a)^n - a$ pentru oricare $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

☒ **3.** Într-un circuit electric sunt legate în paralel două rezistoare cu rezistențele $R_1$ și $R_2$, măsurate în ohmi. Rezistența echivalentă R a grupării rezistențelor $R_1$, $R_2$ este dată de relația:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}. \quad (1)$$

Să se arate că circuitele din figurile 1 și 2 au aceeași rezistență totală pentru oricare valori $R_1, R_2, R_3 \in (0, +\infty)$.

*Soluție:*

Fie $M = (0, +\infty)$ mulțimea valorilor rezistențelor dintr-un circuit.

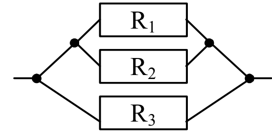


*Figura 1*

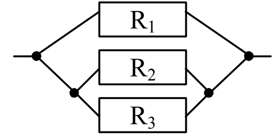


*Figura 2*

Relația (1) definește pe mulțimea M următoarea lege de compoziție:

$$R_1 \circ R_2 = R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

Rezistența totală a circuitului din figura 1 este $R' = (R_1 \circ R_2) \circ R_3$, iar a circuitului din figura 2 este $R'' = R_1 \circ (R_2 \circ R_3)$.

Egalitatea $R' = R''$ este echivalentă cu egalitatea $(R_1 \circ R_2) \circ R_3 = R_1 \circ (R_2 \circ R_3)$, $R_1, R_2, R_3 \in M$.

Avem $(R_1 \circ R_2) \circ R_3 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \circ R_3 = \frac{R_1 R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$.

Analog, $R_1 \circ (R_2 \circ R_3) = R_1 \circ \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = \frac{R_1 R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$.

Așadar $R' = R''$. Mai mult, se obține că legea de compunere a rezistențelor legate în paralel este asociativă.

Pe o mulțime M se pot defini mai multe legi de compoziție.

O mulțime nevidă înzestrată cu una sau mai multe legi de compoziție, care satisfac un set de axiome date sub formă de identități sau alte condiții, formează o **structură algebrică**.

## ❖ DEFINIȚII

- Se numește **semigrup** o pereche $(S, \circ)$ formată dintr-o mulțime nevidă S și o lege de compoziție pe S care îndeplinește *axioma de asociativitate*:
  $S_1 : x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z, \ \forall\ x, y, z \in S.$
- Un semigrup $(S, \circ)$ se numește **semigrup comutativ** sau **abelian** dacă legea de compoziție verifică *axioma de comutativitate*:
  $S_2 : x \circ y = y \circ x, \ \forall\ x, y \in S.$

☞ ***Exemple de semigrupuri***

- Perechile $(\mathbb{N}, +)$ și $(\mathbb{N}, \cdot)$ sunt semigrupuri comutative. Ele reprezintă semigrupul **aditiv** și semigrupul **multiplicativ** al numerelor naturale.
- Fie A o mulțime și $\mathscr{P}(A)$ mulțimea părților lui A. Perechile $(\mathscr{P}(A), \cup)$, $(\mathscr{P}(A), \cap)$, $(\mathscr{P}(A), \Delta)$ sunt semigrupuri comutative.
- Fie A o mulțime nevidă și $\mathscr{F}(A) = \{f \mid f : A \to A\}$. Perechea $(\mathscr{F}(A), \circ)$ este semigrup. Dacă mulțimea A are cel puțin două elemente, semigrupul $(\mathscr{F}(A), \circ)$ este necomutativ.

# EXERCIȚII ȘI PROBLEME

## EXERSARE

**E1.** Să se studieze comutativitatea și asociativitatea legilor de compoziție definite pe mulțimea M, în cazurile:

a) $M = (1, +\infty)$, $x \circ y = 2xy - 2x - 2y + 3$;

b) $M = [1, 3]$, $x \circ y = xy - 2x - 2y + 6$;

c) $M = \mathbb{Z}$, $x \circ y = x + y + xy$;

d) $M = \mathbb{Z}$, $x \circ y = 7xy - 2x - 2y + 8$;

e) $M = \mathbb{Q}$, $x \circ y = xy - x - y$.

**E2.** Să se studieze comutativitatea și asociativitatea legii de compoziție „∘" definită pe mulțimea M, în cazurile:

a) $M = (-1, 1)$, $x \circ y = \dfrac{x + y}{1 + xy}$;

b) $M = \mathbb{C}$, $x \circ y = x + y + ixy$;

c) $M = (1, +\infty)$,

$x \circ y = \sqrt{x^2y^2 - x^2 - y^2 + 2}$;

d) $M = (0, \infty) \setminus \{1\}$; $x \circ y = x^{\ln y}$;

e) $M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \, a \in \mathbb{R} \right\}$,

$A \circ B = AB - A - B + 2I_2$.

**E3.** Să se determine constantele reale pentru care legile de compoziție „∘" sunt comutative și asociative pe mulțimile M date:

a) $M = \mathbb{Z}$, $x \circ y = cx + ay + b$;

b) $M = \mathbb{Q}$, $x \circ y = xy + 2x + ay + b$;

c) $M = \mathbb{C}$, $x \circ y = ixy + ax + by$;

d) $M = (0, +\infty)$, $x \circ y = \dfrac{ax + by}{1 + xy}$.

**E4.** Pe mulțimea $\mathbb{Z}$ se consideră legile de compoziție $x \circ y = x + y - 4$ și $x \top y = xy - 4x - 4y + 20$.

a) Să se arate că $(\mathbb{Z}, \circ)$ și $(\mathbb{Z}, \top)$ sunt semigrupuri comutative.

b) Să se arate că $x \top (y \circ z) = (x \top y) \circ (x \top z)$ (legea de compoziție ⊤ este distributivă față de „∘").

**E5.** Pe mulțimea $\mathbb{Z}$ se consideră legile de compoziție $x \circ y = x + y - 3$ și $x \top y = x + y - 7$.

a) Să se arate că $(\mathbb{Z}, \circ)$ și $(\mathbb{Z}, \top)$ sunt semigrupuri comutative.

b) Să se determine $a, b \in \mathbb{N}^*$, astfel încât funcția $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = ax + b$ să verifice egalitatea: $f(x \circ y) = f(x) \top f(y)$.

**E6.** Pe mulțimea $\mathbb{Z}_5$ se definește operația algebrică $x \circ y = xy + \hat{2}x + \hat{2}y + a$, $\forall\ x, y \in \mathbb{Z}_5$.

a) Pentru care valori ale lui $a \in \mathbb{Z}_5$ există egalitatea $(\hat{2} \circ a) \circ a^2 = \hat{2} \circ (a \circ a^2)$?

b) Să se determine $a \in \mathbb{Z}_5$ pentru care operația „∘" este asociativă.

## APROFUNDARE

**A1.** Fie $A = [0, 2)$. Pe mulțimea A se definește legea de compoziție „∘" prin:

$x \circ y = \dfrac{4x + 4y}{4 + xy}$, $x, y \in A$.

a) Să se arate că legea este asociativă și comutativă.

b) Să se verifice că dacă $x, y, z \in A$ și $x \circ z = y \circ z$, atunci $x = y$.

c) Să se determine $x \in A$ care verifică ecuația $x \circ x \circ x = 0$.

*(Univ. Babeș-Bolyai, Cluj-Napoca, 2000)*

**A2.** **Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție $x \circ y = xy + 2ax + by$, $\forall\ x, y \in \mathbb{R}$. Legea este asociativă și comutativă dacă:**

**a)** $a = \frac{1}{3}, b = \frac{1}{2}$; **b)** $a = b = \frac{1}{3}$;

**c)** $a^2 + b^2 = 2$; **d)** $a = 1, b = 2$;

**e)** $a = b = 0$ sau $a = \frac{1}{2}, b = 1$.

***(Univ. Maritimă, Constanța, 2000)***

**A3.** **Să se arate că următoarele legi de compoziție definite pe $\mathbb{R}$ sunt comutative și asociative:**

**a)** $x \perp y = \max(x, y)$;

**b)** $x \perp y = \min(x, y)$.

**A4.** **Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ pentru care următoarele operații algebrice definite pe mulțimea $M \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, sunt comutative și asociative:**

**a)** $M = \left\{\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} \middle| x, y \in \mathbb{R}\right\}$, $A \circ B = A + aB + bI_2$;

**b)** $M = \left\{\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x+y \end{pmatrix} \middle| x, y \in \mathbb{R}\right\}$, $A \circ B = aAB + bBA$;

**c)** $M = \left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x & x \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{R}\right\}$, $A \circ B = aAB + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}(A + B)$.

**A5.** **Fie M o mulțime nevidă și operația algebrică asociativă „ $\circ$ “ definită pe M. Să se găsească condiții suficiente asupra elementului $a \in M$ pentru care operația „ $\perp$ “ definită pe M este asociativă:**

**a)** $x \perp y = a \circ x \circ y$;

**b)** $x \perp y = x \circ a \circ y$;

**c)** $x \perp y = a \circ x \circ y \circ a$;

**d)** $x \perp y = x \circ y \circ a$.

**A6.** **Să se determine numărul legilor de compoziție comutative definite pe o mulțime cu $n \in \mathbb{N}^*$ elemente.**

## 2.3. Element neutru

Fie M o mulțime nevidă.

### ❖ DEFINIȚII

- Legea de compoziție $M \times M \to M$, $(x, y) \to x \circ y$ admite **element neutru** dacă există un element $e \in M$, astfel încât $\mathbf{x \circ e = e \circ x = x}$, $\forall\ \mathbf{x \in M}$. (1)
- Elementul $e \in M$ cu proprietatea (1) se numește **element neutru** pentru legea de compoziție „$\circ$“.

☞ ***Exemple***

- Numărul 0 este element neutru pentru adunarea numerelor pe mulțimile $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$:

$$x + 0 = 0 + x = x,\ \forall\ x.$$

- Matricea $O_{m,n}$ este element neutru pentru adunarea matricelor pe mulțimea $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$:

$$A + O_{m,n} = O_{m,n} + A = A,\ \forall\ A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C}).$$

- Matricea unitate $I_n$ este element neutru pentru înmulțirea matricelor pe mulțimea $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$:

$$A \cdot I_n = I_n \cdot A = A, \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).$$

- Vectorul nul $\vec{0}$ este element neutru pentru adunarea vectorilor pe mulțimea vectorilor $\mathcal{V}$ din plan sau din spațiu:

$$\vec{v} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{v} = \vec{v}, \forall \vec{v} \in \mathcal{V}.$$

**▣ TEOREMA 1 (unicitatea elementului neutru)**

Fie M o mulțime nevidă. Dacă legea de compoziție $M \times M \to M$, $(x, y) \to x \circ y$, admite un element neutru, atunci acesta este **unic.**

*Demonstrație*

Să presupunem că $e_1$ și $e_2$ sunt elemente neutre pentru legea de compoziție „∘". Atunci au loc relațiile:

$x \circ e_1 = x$ și $e_2 \circ y = y$.

Luând $x = e_2$ și $y = e_1$, se obține că:

$e_2 \circ e_1 = e_2$ și $e_2 \circ e_1 = e_1$, relație din care rezultă că $e_1 = e_2$ și unicitatea este demonstrată. ■

## Exerciții rezolvate

☒ **1.** Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(x, y) \to x \circ y = xy + ax + ay + b$. Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ pentru care legea de compoziție dată admite element neutru e = 2.

*Soluție*

Numărul e = 2 este element neutru dacă $x \circ 2 = 2 \circ x = x, \forall x \in \mathbb{R}$. Din aceste relații se obține $2x + 2a + ax + b = x, \forall x \in \mathbb{R}$, de unde $a + 2 = 1$ și $2a + b = 0$. Rezultă $a = -1$ și $b = 2$, iar legea de compoziție este $x \circ y = xy - x - y + 2$.

☒ **2.** Fie $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{R} \right\}$.

**a)** Să se arate că există $A \in M$, astfel încât $AX = X, \forall X \in M$.

**b)** Există matricea $B \in M$, astfel încât $XB = X, \forall X \in M$?

*Soluție*

**a)** Fie $X = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M$ și $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M$. Din egalitatea $AX = X$ se obține:

$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, de unde $\begin{pmatrix} ax & ay \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Această relație se

verifică pentru oricare x, y ∈ ℝ dacă a = 1, b ∈ ℝ, deci $A = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, b ∈ ℝ.

Rezultă că există o infinitate de matrice A cu proprietatea cerută.

**b)** Fie $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M$. Din egalitatea XB = X se obține $\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ sau $\begin{pmatrix} ax & bx \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, de unde a = 1, bx = y.

A doua egalitate nu poate avea loc pentru oricare x, y ∈ ℝ.
Așadar, nu există B ∈ M cu proprietatea cerută.

## ➲ OBSERVAȚII

**1.** Fie M o mulțime nevidă și „∘" o lege de compoziție pe M.

Dacă există $e_s \in M$, astfel încât $e_s \circ x = x, \forall\, x \in M$, elementul $e_s$ se numește **element neutru la stânga**.
Dacă există $e_d \in M$, astfel încât $x \circ e_d = x, \forall\, x \in M$, elementul $e_d$ se numește **element neutru la dreapta**.
Din problema rezolvată rezultă că există legi de compoziție care au element neutru la stânga, dar nu au element neutru la dreapta.

**2.** Operația de scădere pe ℝ are elementul neutru la dreapta $e_d = 0$, dar nu are element neutru la stânga. Într-adevăr, x − 0 = x, ∀ x ∈ ℝ, și nu există e ∈ ℝ astfel încât e − x = x, ∀ x ∈ ℝ.

## ❖ DEFINIȚII

- Perechea $(M, \circ)$ se numește **monoid** dacă verifică următoarele axiome:

  *($M_1$) axioma asociativității:*

  $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z), \ \forall\ x, y, z \in M;$

  *($M_2$) axioma elementului neutru:*

  $\exists\ e \in M$, astfel încât $x \circ e = e \circ x = x, \forall x \in M.$
- Dacă, în plus, legea de compoziție „∘" este comutativă, monoidul se numește **monoid comutativ** sau **abelian.**

Se observă că perechea $(M, \circ)$ este monoid dacă este semigrup cu element neutru (semigrup unitar).

☞ ***Exemple***

- Perechile $(\mathbb{N}, +), (\mathbb{N}, \cdot), (\mathbb{Z}, +), (\mathbb{Z}, \cdot), (\mathbb{R}, +), (\mathbb{R}, \cdot)$ sunt monoizi comutativi.
- Perechile $(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \cdot), (\mathcal{F}(A), \circ)$ sunt monoizi necomutativi.

## 2.4. Elemente simetrizabile

❖ **DEFINIȚII**

Fie M o mulțime nevidă, înzestrată cu o lege de compoziție $M \times M \to M$, $(x, y) = x \circ y$, care admite elementul neutru e.

- Elementul $x \in M$ se numește **simetrizabil** în raport cu legea de compoziție „∘" dacă există $x' \in M$, astfel încât $x \circ x' = x' \circ x = e$. (1)
- Elementul $x' \in M$ se numește **simetricul** elementului x în raport cu legea de compoziție „∘".

☞ ***Exemple***

- Orice număr real x este simetrizabil în raport cu adunarea numerelor reale. În acest caz, $x' = -x$ și se numește **opusul** numărului x.
- Orice număr real nenul x este simetrizabil în raport cu înmulțirea pe $\mathbb{R}$. Simetricul elementului $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ este $x' = \frac{1}{x}$ și se numește **inversul** lui x. Numărul x = 0 nu este simetrizabil în raport cu înmulțirea numerelor reale.
- Fie $\mathbb{Z}$ mulțimea numerelor întregi. Singurele elemente simetrizabile în raport cu înmulțirea sunt 1 și −1.

Dacă legea de compoziție pe mulțimea M are element neutru, se notează cu $\mathcal{U}(M)$ mulțimea elementelor simetrizabile în raport cu legea de compoziție.

Deoarece elementul neutru are proprietatea $e \circ e = e$, rezultă că $e \in \mathcal{U}(M)$, deci $\mathcal{U}(M)$ este mulțime nevidă.

Mulțimea $\mathcal{U}(M)$ se numește **mulțimea unităților** lui M.

▣ **TEOREMA 2 (unicitatea simetricului)**

Fie „∘" o lege de compoziție pe mulțimea M, asociativă și cu elementul neutru e. Dacă un element $x \in M$ are un simetric, atunci acesta este unic.

<u>*Demonstrație*</u>

Presupunem că $x'$ și $x''$ sunt elemente simetrice ale elementului x. Din asociativitatea legii de compoziție „∘" se obține:

$$x' \circ x \circ x'' = (x' \circ x) \circ x'' = e \circ x'' = x'', \text{ și}$$

$$x' \circ x \circ x'' = x' \circ (x \circ x'') = x' \circ e = x'.$$

Rezultă că $x' = x''$ și unicitatea este demonstrată. ■

## ➲ OBSERVAȚIE

Dacă o lege de compoziție „$\circ$“ pe o mulțime M are element neutru, dar nu este asociativă, este posibil ca un element $x \in M$ să admită mai multe elemente simetrice.

☞ ***Exemplu***

Fie $M = \{e, a, b\}$ și legea de compoziție dată cu ajutorul tablei lui Cayley:

| $\circ$ | e | a | b |
|---|---|---|---|
| e | e | a | b |
| a | a | e | e |
| b | b | e | a |

Legea nu este asociativă deoarece: $(b \circ b) \circ a = a \circ a = e$, iar $b \circ (b \circ a) = b \circ e = b$.

Elementul $a \in M$ are simetricele a și b, deoarece $a \circ a = e$ și $a \circ b = e = b \circ a$.

### ▣ TEOREMA 3

Fie M o mulțime nevidă înzestrată cu o lege de compoziție $M \times M \to$ $\to M$, $(x, y) \to x \circ y$, asociativă și cu element neutru.

**a)** Dacă $x \in M$ este simetrizabil în raport cu legea de compoziție „$\circ$“, atunci simetricul său $x'$ este simetrizabil și $(x')' = x$.

**b)** Dacă $x, y \in \mathcal{U}(M)$, atunci $x \circ y \in \mathcal{U}(M)$ și $(x \circ y)' = y' \circ x'$.

**c)** Dacă $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathcal{U}(M)$, atunci $(x_1 \circ x_2 \circ \ldots \circ x_n) \in \mathcal{U}(M)$ și $(x_1 \circ x_2 \circ \ldots \circ x_n)' = x_n' \circ x_{n-1}' \circ \ldots \circ x_1'$.

*Demonstrație*

**a)** Deoarece $x \circ x' = x' \circ x = e$, se observă că simetricul lui $x'$ este chiar x, deci $(x')' = x$.

**b)** Să considerăm $z = y' \circ x' \in M$. Avem:

$(x \circ y) \circ z = (x \circ y) \circ (y' \circ x') = x \circ (y \circ y') \circ x' = x \circ e \circ x' = x \circ x' = e$ și

$z \circ (x \circ y) = (y' \circ x') \circ (x \circ y) = y' \circ (x' \circ x) \circ y = y' \circ e \circ y = y' \circ y = e$.

**c)** Se folosește inducția matematică.

Pentru n = 1 și n = 2, proprietatea este adevărată având în vedere b).

Să presupunem proprietatea adevărată pentru $k \in \mathbb{N}^*$. Avem:

$(x_1 \circ x_2 \circ \ldots \circ x_k \circ x_{k+1})' = ((x_1 \circ x_2 \circ \ldots \circ x_k) \circ x_{k+1})' = x_{k+1}' \circ$ $\circ (x_1 \circ x_2 \circ \ldots \circ x_k)' = x_{k+1}' \circ (x_k' \circ \ldots \circ x_1') = x_{k+1}' \circ x_k' \circ \ldots \circ x_1'$, deci proprietatea are loc și pentru k + 1.

În concluzie, proprietatea are loc pentru oricare $n \in \mathbb{N}^*$. ■

## *Probleme rezolvate*

☒ **1.** Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se consideră legea de compoziție $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(x, y) \to x \circ y = xy + ax + by + c$.

**a)** Să se determine a, b, c $\in \mathbb{R}$ pentru care legea este comutativă, asociativă și admite element neutru.

**b)** Pentru valorile a, b, c găsite, să se determine $\mathcal{U}(\mathbb{R})$.

*Soluție*

**a)** Din relația $x \circ y = y \circ x$ se deduce $a = b$, deci $x \circ y = xy + a(x + y) + c$.
Legea de compoziție este asociativă dacă $x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z, \forall\ x, y, z \in \mathbb{R}$.
Se obține egalitatea $xyz + a(xy + yz + zx) + a^2x + a^2y + (a + c)z + ac + c =$
$= xyz + a(xy + yz + zx) + (a + c)x + a^2y + a^2z + ac + c, \forall\, x, y, z \in \mathbb{R}$.
Rezultă că $a + c = a^2$ și $x \circ y = xy + a(x + y) + a^2 - a$.

Legea de compoziție dată admite elementul neutru „e“ dacă $x \circ e = e \circ x = x, \forall\ x \in \mathbb{R}$. Se obține egalitatea $xe + a(x + e) + a^2 - a = x$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$, de unde $(x + a)e = (x + a)\cdot(1 - a)$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$ și, astfel, $e = 1 - a$.
În concluzie, $b = a$, $c = a^2 - a$, $a \in \mathbb{R}$.

**b)** Fie x un element simetrizabil și $x'$ simetricul său. Se obține $x' \circ x = e$ și $xx' + a(x + x') + a^2 - a = 1 - a$, de unde $x'(x + a) = 1 - a^2 - ax$.
Se observă ușor că dacă $x \neq -a$ rezultă $x' = \dfrac{1 - a^2 - ax}{x + a}$. Așadar, $\mathcal{U}(\mathbb{R}) =$
$= \mathbb{R} \setminus \{-a\}$.

☒ **2.** Fie „$\circ$“ lege de compoziție asociativă și cu element neutru pe mulțimea M. Să se arate că dacă $x \in \mathcal{U}(M)$, $y \notin \mathcal{U}(M)$, atunci $x \circ y$ și $y \circ x$ nu sunt simetrizabile.

*Soluție*

Să presupunem prin absurd că $x \circ y \in \mathcal{U}(M)$. Atunci există $s \in \mathcal{U}(M)$, astfel încât $(x \circ y) \circ s = e = s \circ (x \circ y)$. De aici rezultă $x \circ (y \circ s) = e$ și $y \circ s = x'$. Se obține $y = x' \circ s' = (s \circ x)'$ și $y \in \mathcal{U}(M)$, în contradicție cu ipoteza.

Așadar, $x \circ y \notin \mathcal{U}(M)$. Analog se arată că $y \circ x \notin \mathcal{U}(M)$.

# EXERCIȚII ȘI PROBLEME

## EXERSARE

**E1.** Să se verifice dacă operația algebrică „∘" definită pe mulțimea M admite element neutru:

a) $M = \mathbb{R}$, $x \circ y = 2xy + x + y$;

b) $M = \mathbb{C}$, $x \circ y = xy + 2x + 2y + 2$;

c) $M = \mathbb{Z}$, $x \circ y = xy - 3x - 3y + 12$;

d) $M = (-1, 1)$, $x \circ y = \dfrac{x+y}{1+xy}$;

e) $M = \mathbb{Z}_7$, $x \circ y = xy + \hat{5}x + \hat{5}y + \hat{6}$.

**E2.** Să se determine elementul neutru pentru operația „∘" definită pe M:

a) $M = (-3, +\infty)$, $x \circ y = xy + 3x + 3y + 6$;

b) $M = [7, +\infty)$, $x \circ y = xy - 7x - 7y + 56$;

c) $M = (0, 1)$, $x \circ y = \dfrac{xy}{2xy - x - y + 1}$;

d) $M = (0, +\infty) \setminus \{1\}$, $x \circ y = x^{9\log_2 y}$.

**E3.** Să se determine elementul simetric al elementului $s \in M$, dacă:

a) $M = \mathbb{R}$, $x \circ y = xy + x + y$, $s \in \left\{-3, 2, \sqrt{2}\right\}$;

b) $M = \mathbb{Z}$, $x \circ y = x + y - 13$, $s \in \{-1, 0, 3, 11\}$;

c) $M = \mathbb{C}$, $x \circ y = x + y + i$, $s \in \{i, -i, 1+i\}$;

d) $M = (-3, 3)$, $x \circ y = \dfrac{9x + 9y}{9 + xy}$, $s \in \left\{0, -2, 2, \dfrac{1}{2}\right\}$.

**E4.** Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se consideră legea de compoziție $x \circ y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$, $x, y \in \mathbb{R}$.

a) Să se arate că $(\mathbb{R}, \circ)$ este monoid comutativ.

b) Să se arate că $\mathscr{U}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

## APROFUNDARE

**A1.** Să se determine parametrii pentru care operațiile date au elementul neutru indicat:

a) $M = \mathbb{R}$, $x \circ y = xy + ax + ay + 2$, $e = 2$;

b) $M = \mathbb{Q}$, $x \circ y = x + y + a$, $e = -5$;

c) $M = (2, 3)$, $x \circ y = \dfrac{5xy - 12x - 12y + a}{2xy - 5x - 5y + 13}$, $e = \dfrac{5}{2}$.

**A2.** Pe mulțimea $\mathbb{Q}$ se consideră legile de compoziție $x \circ y = \dfrac{xy}{4} - 2x - 2y + 24$, $x \perp y = x + y + 2$, $\forall\ x, y \in \mathbb{Q}$. Dacă $e_1$ și $e_2$ sunt elementele neutre în raport cu legile „∘", respectiv „⊥", iar $p = e_1 \perp e_2$, atunci:

a) $p = 4$; b) $p = -6$; c) $p = 10$;
d) $p = 12$; e) $p = 16$.

*(ASE, București, 1998)*

**A3.** Pe mulțimea $\mathbb{C}$ se definește legea de compoziție $z_1 \circ z_2 = z_1 \cdot z_2 + i(z_1 + z_2) - 1 - i$, $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Dacă m este modulul elementului neutru al legii „∘", atunci:

a) $m = 1$; b) $m = \sqrt{5}$;
c) $m = \sqrt{2}$; d) $m = \sqrt{3}$;
e) $m = 2\sqrt{2}$.

*(ASE, București, 1998)*

**A4.** Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție $x \circ y = xy - ax + by$. Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât $(\mathbb{R}, \circ)$ să fie monoid. Pentru fiecare monoid obținut să se determine $\mathscr{U}(\mathbb{R})$.

*(Univ. București, 1986)*

**A5.** Pe mulțimea $M = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ se consideră legea de compoziție:
$(a, b) \circ (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$.

a) Să se arate că $(M, \circ)$ este monoid comutativ.

b) Să se determine $\mathcal{U}(M)$.

**A6.** Fie $M = \left\{ \begin{pmatrix} 1-x & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 1-x \end{pmatrix} \middle| \; x \in \mathbb{R} \right\}$.

a) Să se arate că $(\mathcal{M}, \cdot)$ este monoid comutativ.

b) Să se determine $\mathcal{U}(M)$.

**A7.** Fie $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$,
$M = \{a^2 + b^2 \mid a, b \in \mathbb{Z}[i]\}$.

a) Să se arate că $(\mathbb{Z}[i], +)$, $(\mathbb{Z}[i], \cdot)$, $(\mathcal{M}, \cdot)$ sunt monoizi comutativi.

b) Să se determine elementele simetrizabile ale fiecărui monoid.

# EXERCIȚII ȘI PROBLEME RECAPITULATIVE

## EXERSARE

**E1.** Fie $M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Să se alcătuiască tabla înmulțirii pe mulțimea M și să se studieze proprietățile acesteia.

**E2.** Se consideră mulțimea $A = \{1, 2, 3\}$.

a) Să se alcătuiască tabla diferenței simetrice pe mulțimea $\mathcal{P}(A)$.

b) Să se arate că $(\mathcal{P}(A), \cup)$, $(\mathcal{P}(A), \cap)$, $(\mathcal{P}(A), \Delta)$ sunt monoizi comutativi.

c) Să se determine elementele simetrizabile în monoizii de la b).

**E3.** Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ și mulțimea $\mathcal{M} = \{A^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Să se arate că $(\mathcal{M}, \cdot)$ formează un monoid comutativ în care fiecare element este simetrizabil.

**E4.** Să se arate că mulțimea:

$M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \right\}$

formează un monoid comutativ în raport cu înmulțirea matricelor.
Să se determine $\mathcal{U}(M)$.

**E5.** Se consideră matricele:
$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ și mulțimea $\mathcal{M} = \{aA + B \mid a \in \mathbb{R}^*\}$. Să se studieze dacă $(\mathcal{M}, \cdot)$ este monoid comutativ și să se determine $\mathcal{U}(\mathcal{M})$.

## APROFUNDARE

**A1.** Să se dea exemplu de o lege de compoziție care este comutativă și nu este asociativă.

**A2.** Să se dea exemplu de o lege de compoziție neasociativă și care admite element neutru.

**A3.** Fie M o mulțime nevidă și $(\mathcal{F}(M), \circ)$ monoidul funcțiilor definite pe M.
a) Să se determine care sunt elementele simetrizabile în raport cu compunerea funcțiilor, dacă elementul neutru este funcția identică.
b) În ce caz monoidul $(\mathcal{F}(M), \circ)$ este comutativ?

**A4.** Fie $a \in (0, \infty)$ și $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$$f_a(x) = \begin{cases} ax, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}.$$
a) Să se arate că $f_a \circ f_b = f_{ab}$.
b) Să se arate că mulțimea $\mathcal{F} = \{f_a \mid a \in (0, \infty)\}$ formează monoid în raport cu operația de compunere a funcțiilor.
c) Să se determine $\mathcal{U}(\mathcal{F})$.

**A5.** Pe mulțimea $\mathbb{N}^*$ se definesc legile de compoziție:
$x \top y = \text{c.m.m.d.c.}(x, y)$ și
$x \perp y = \text{c.m.m.m.c.}(x, y)$.
a) Perechile $(\mathbb{N}^*, \top)$ și $(\mathbb{N}^*, \perp)$ sunt monoizi?
b) Să se determine valoarea de adevăr a propoziției: $\forall\ x, y, z \in \mathbb{N}^*$,
$x \top (y \perp z) = (x \top y) \perp (x \top z)$.

**A6.** Pe mulțimea $\mathbb{Z}$ se definește legea de compoziție „∘", astfel:
$x \circ y = axy + bx + by + c$, unde a, b, c $\in \mathbb{Z}$. Să se arate că:
a) legea de compoziție „∘" este asociativă dacă și numai dacă
$b^2 - b = ac$;
b) legea de compoziție „∘" admite element neutru dacă și numai dacă
$b + ac = b^2$ și b divide c.

**A7.** Se consideră mulțimea M nevidă și „∘" o lege de compoziție pe mulțimea M care este asociativă și admite element neutru. Dacă $M'$ este o mulțime nevidă și $f : M \to M'$ o funcție bijectivă, să se studieze proprietățile legii de compoziție „⊤" definite pe $M'$:
$x \top y = f\left(f^{-1}(x) \circ f^{-1}(y)\right)$.

**A8.** Fie $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_a(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ ax, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$
și $\mathcal{F} = \{f_a \mid a \in \mathbb{Q}\}$.
a) Să se verifice dacă $\mathcal{F}$ este parte stabilă în raport cu compunerea funcțiilor.
b) Să se studieze dacă $(\mathcal{F}, \circ)$ este monoid și să se afle $\mathcal{U}(\mathcal{F})$.

# TESTE DE EVALUARE

## Testul 1

❍ **1.** **Pe mulțimea $G = (1, +\infty)$ se consideră legea de compoziție $x \perp y = 7xy - 7(x + y) + 8$. Mulțimea G este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea de compoziție „⊥"?**

***(3 puncte)***

❍ **2.** **Pe mulțimea $E = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ se definește legea de compoziție notată „∘", astfel: $x \circ y$ reprezintă restul împărțirii numărului $x^{1+y}$ la 5.**

**a) Să se alcătuiască tabla legii de compoziție „∘".**

**b) Să se arate că legea de compoziție nu este comutativă și asociativă.**

***(3 puncte)***

❍ **3.** **Pe mulțimea $G = (1, +\infty)$ definim legea de compoziție $x \circ y = 1 + (x - 1)^{\lg(y-1)}$.**

**a) Să se determine $2 \circ 2$ și să se rezolve ecuația $3 \circ x = 3$.**

**b) Să se arate că pentru oricare $x, y \in G$, $x \circ y = 1 + 10^{\lg(x-1)\cdot\lg(y-1)}$.**

**c) Să se studieze proprietățile legii de compoziție „∘".**

***(3 puncte)***

## Testul 2

❍ **1.** **Fie mulțimea $M = \{x + y\sqrt{7} \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$ și $M' = \{x + y\sqrt{7} \mid x, y \in \mathbb{Z}, x^2 - 7y^2 = 1\}$.**

**a) Să se arate că mulțimea $M'$ este parte stabilă a lui M în raport cu înmulțirea.**

**b) Să se dea exemplu de cel puțin trei elemente $x + y\sqrt{7} \in M'$, cu $y > 0$.**

***(3 puncte)***

❍ **2.** **Pe mulțimea $M = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ se definește legea de compoziție „∘" prin:**

$$x \circ y = \begin{cases} x + y, & \text{dacă } y \in (x, 2] \\ x - y, & \text{dacă } y \le x \\ y - x, & \text{dacă } x \le 3 \text{ și } y > 2 \end{cases}.$$

**a) Să se alcătuiască tabla legii de compoziție.**

**b) Să se arate că legea de compoziție nu este comutativă și asociativă.**

**c) Să se arate că legea de compoziție admite element neutru și fiecare element $x \in M$ este simetrizabil.**

***(6 puncte)***

## Testul 3

❍ **1.** **a) Să se calculeze în $\mathbb{Z}_6$ produsul $\hat{1} \cdot \hat{2} \cdot \hat{3} \cdot \hat{4} \cdot \hat{5}$.**

**b) Să se calculeze în $\mathbb{Z}_6$ suma $\hat{1} + \hat{2} + \hat{3} + \hat{4} + \hat{5}$.**

**c) Câte soluții are în $\mathbb{Z}_6$ ecuația $\hat{3}x = \hat{0}$?**

**d) Care este cel mai mic număr natural nenul cu proprietatea că $\underbrace{\hat{2}+\hat{2}+\ldots+\hat{2}}_{n \text{ ori}} = \hat{0}$ în $\mathbb{Z}_6$?**

*(3 puncte)*
*(Bacalaureat, iunie, 2003)*

❍ **2. Se consideră funcțiile $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_a(x) = \log_2\left[\left(1+2^x\right)^a - 1\right]$, $a > 0$ și mulțimea $\mathcal{F} = \{f_a \mid a \in (0, +\infty)\}$.**

**a) Să se arate că $f_a$ este funcție inversabilă și $f_a^{-1} = f_{\frac{1}{a}}$.**

**b) Să se demonstreze că mulțimea $\mathcal{F}$ este parte stabilă în raport cu compunerea funcțiilor.**

**c) Să se arate că $(\mathcal{F}, \circ)$ este monoid comutativ și să se determine $\mathcal{U}(\mathcal{F})$.**

*(2 puncte)*

❍ **3. Pe mulțimea numerelor complexe se consideră legea de compoziție „$\circ$“ definită prin: $x \circ y = xy + ix + iy - 1 - i$, $\forall\, x, y \in \mathbb{C}$.**

**a) Să se arate că $x \circ y = (x+i)(y+i) - i$.**

**b) Să se arate că legea „ $\circ$ “ este asociativă.**

**c) Să se determine mulțimea valorilor lui $n \in \mathbb{N}^*$, pentru care are loc egalitatea:**
**$x_1 \circ x_2 \circ \ldots \circ x_n = (x_1+i)(x_2+i)\ldots(x_n+i) - i$, $\forall\, x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{C}$.**

**d) Să se calculeze $E = (-100i) \circ (-99i) \circ \ldots \circ (-i) \circ 0 \circ i \circ (2i) \circ \ldots \circ (99i) \circ (100i)$.**

**e) Să se rezolve în $\mathbb{C}$ ecuația $x \circ x \circ x \circ x = 1 - i$.**

*(4 puncte)*
*(Bacalaureat, iunie, 2003)*

## 3 Noțiunea de grup. Exemple

Fie G o mulțime nevidă și $(x, y) \to \varphi(x,y) \overset{\text{not}}{=} x \circ y$, o lege de compoziție pe G.

### ❖ DEFINIȚII

• Perechea $(G, \circ)$ se numește **grup** dacă sunt îndeplinite următoarele axiome:

*(G1) Axioma asociativității:*

$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$, $\forall\, x, y, z \in G$.

*(G2) Axioma elementului neutru:*

$\exists\, e \in G$, astfel încât $x \circ e = e \circ x = x$, $\forall\, x \in G$.

*(G3) Axioma elementelor simetrizabile:*
$\forall\ x \in G,\ \exists\ x' \in G,$ astfel încât $x \circ x' = x' \circ x = e.$

• Un grup $(G, \circ)$ se numește **grup comutativ** sau **abelian** dacă este verificată *axioma de comutativitate:*
*(G4):* $x \circ y = y \circ x,\ \forall\ x, y \in G.$

## ➢ COMENTARII

**a)** Se observă că perechea $(G, \circ)$ este grup dacă este monoid cu proprietatea că fiecare element este simetrizabil. Într-un grup, $\mathscr{U}(G) = G.$

**b)** Elementul $e \in G$, a cărui existență este asigurată de axioma $G_2$, este unic determinat și se numește **elementul neutru** al grupului.

**c)** Elementul $x' \in G$, a cărui existență o asigură axioma G3 pentru fiecare $x \in G$, este unic determinat deoarece legea de compoziție a grupului este asociativă.

• Un grup $(G, \cdot)$ se numește **grup finit** dacă mulțimea G este finită. Un grup $(G, \cdot)$ este **grup infinit** dacă mulțimea G nu este finită.

• Fie $(G, \cdot)$ un grup. Se numește **ordinul grupului** G, cardinalul mulțimii G și se notează $\text{ord}(G)$.

☞ ***Exemple de grupuri***

**1.** Din proprietățile adunării și înmulțirii numerelor rezultă:
**a)** $(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{Q}, +), (\mathbb{R}, +), (\mathbb{C}, +)$ sunt grupuri abeliene, numite **grupul aditiv** al numerelor întregi, raționale, reale, respectiv al numerelor complexe.
**b)** $(\mathbb{Q}^*, \cdot), (\mathbb{R}^*, \cdot), (\mathbb{C}^*, \cdot)$ sunt grupuri abeliene, numite **grupul multiplicativ** al numerelor raționale, reale, respectiv al numerelor complexe nenule.
Grupurile de la a) și b) sunt denumite **grupuri numerice**.

**2.** Mulțimile de matrice $\mathscr{M}_n(\mathbb{Z}), \mathscr{M}_n(\mathbb{Q}), \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ și $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ împreună cu adunarea matricelor formează grupuri comutative.

## *Exercițiu rezolvat*

☒ Pe mulțimea $G = (2, +\infty)$ se definește legea de compoziție $G \times G \to G$, $(x, y) \to x \circ y = xy - 2x - 2y + 6,\ \forall\ x, y \in G.$ Să se arate că perechea $(G, \circ)$ este grup abelian.

<u>*Soluție*</u>

Deoarece $x \circ y = (x-2)(y-2) + 2,\ \forall\ x, y \in (2, +\infty)$ se obține că $x \circ y > 2$, deci $x \circ y \in G.$

Perechea $(G, \circ)$ este grup abelian dacă sunt verificate axiomele grupului (G1)-(G4).

*(G1) Axioma asociativității:*

Avem: $(x \circ y) \circ z = (xy - 2x - 2y + 6) \circ z = (xy - 2x - 2y + 6) \cdot z -$
$-2(xy - 2x - 2y + 6) - 2z + 6 = xyz - 2(xy + xz + yz) + 4(x + y + z) - 6.$

Analog se obține:
$x \circ (y \circ z) = x \circ (yz - 2y - 2z + 6) = x \cdot (yz - 2y - 2z + 6) - 2x - 2(yz - 2y - 2z + 6) +$
$+6 = xyz - 2(xy + xz + yz) + 4(x + y + z) - 6.$

În concluzie, axioma asociativității (G1) este verificată.

*(G2) Axioma elementului neutru:*

Fie $e \in G$, astfel încât $x \circ e = e \circ x = x, \ \forall\, x \in G$.

Se obține $xe - 2x - 2e + 6 = x, \ \forall\, x \in G$, echivalentă cu $e(x - 2) = 3(x - 2), \ \forall\, x \in G$.

Elementul neutru este $e = 3 \in G$.

*(G3) Axioma elementelor simetrizabile:*

Dacă $x \in G$, notăm cu $x'$ simetricul lui x. Se obține $x \circ x' = 3 = x' \circ x$, relație care conduce la $x' \cdot x - 2x - 2x' + 6 = 3$.

Rezultă $x' = \dfrac{2x - 3}{x - 2} = 2 + \dfrac{1}{x - 2} \in (2, +\infty)$.

Așadar, $(G, \circ)$ este grup.

Deoarece $x \circ y = xy - 2x - 2y + 6 = yx - 2y - 2x + 6 = y \circ x$, pentru oricare $x, y \in G$, grupul $(G, \circ)$ este grup comutativ.

❑ TEMĂ

**Fie $(G, \circ)$ un monoid. Să se arate că $(\mathcal{U}(G), \circ)$ este grup.**

## 3.1. Grupul aditiv al resturilor modulo n

Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și $\mathcal{R}_n = \{0, 1, 2, \ldots, n - 1\}$ mulțimea resturilor obținute la împărțirea numerelor întregi prin n. Pe mulțimea $\mathcal{R}_n$ s-au definit operațiile de adunare și înmulțire modulo n: $\mathcal{R}_n \times \mathcal{R}_n \to \mathcal{R}_n$, prin:

$a \oplus b = (a + b) \bmod n$, respectiv $a \odot b = (a \cdot b) \bmod n$.

Elementul $a \oplus b$ reprezintă restul împărțirii sumei a + b prin n. Rezultă că există numărul $q \in \mathbb{Z}$, astfel încât $a + b = nq + (a \oplus b)$. (1)

**▣ TEOREMA 4**

Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Atunci:

**a)** $(\mathcal{R}_n, \oplus)$ este grup abelian;

**b)** $(\mathcal{R}_n, \odot)$ este monoid abelian.

<u>*Demonstrație*</u>

**a)** Verificăm axiomele grupului:

*(G1) Axioma asociativității:*

Folosind relația (1) se obține succesiv:

$(x \oplus y) \oplus z = ((x + y) \bmod n) \oplus z = ((x + y) + z) \bmod n.$ (2)

De asemenea:

$x \oplus (y \oplus z) = x \oplus ((y + z) \bmod n) = (x + (y + z)) \bmod n.$ (3)

Deoarece adunarea numerelor întregi este asociativă, din relațiile (2) și (3) rezultă că $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$, $\forall$ x, y, $z \in \mathscr{R}_n$.

Așadar, adunarea modulo n este asociativă.

*(G2)* Numărul 0 este element neutru, deoarece se verifică imediat că $0 \oplus x = x \oplus 0 = x$, $\forall\ x \in \mathscr{R}_n$.

*(G3)* Fie $x \in \mathscr{R}_n \setminus \{0\}$. Atunci $x' = n - x \in \mathscr{R}_n$.

Rezultă că: $x \oplus x' = 0$ și $x' \oplus x = 0$.

Având și $0 \oplus 0 = 0$, rezultă că oricare $x \in \mathscr{R}_n$ este simetrizabil în raport cu adunarea modulo n.

Așadar, $(\mathscr{R}_n, \oplus)$ este grup. Mai mult, pentru orice $x, y \in \mathscr{R}_n$, avem: $x \oplus y = (x + y) \bmod n = (y + x) \bmod n = y \oplus x$, deci grupul $(\mathscr{R}_n, \oplus)$ este grup comutativ.

**b)** Analog se arată că $(\mathscr{R}_n, \odot)$ este monoid comutativ. ■

## 3.2. Grupul claselor de resturi modulo n

Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și $\mathbb{Z}_n = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, ..., \widehat{n-1}\}$ mulțimea claselor de resturi modulo n. Pe mulțimea $\mathbb{Z}_n$ s-au definit operațiile:

- $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n$, $(\hat{a}, \hat{b}) \to \hat{a} + \hat{b} \overset{def}{=} \widehat{a \oplus b}$, numită **adunarea claselor de resturi modulo n**;
- $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n$, $(\hat{a}, \hat{b}) \to \hat{a} \cdot \hat{b} \overset{def}{=} \widehat{a \odot b}$, numită **înmulțirea claselor de resturi modulo n**.

▣ **TEOREMA 5**

Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Atunci:

**a)** $(\mathbb{Z}_n, +)$ este grup abelian, numit **grupul aditiv al claselor de resturi modulo n**;

**b)** $(\mathbb{Z}_n, \cdot)$ este monoid comutativ;

**c)** $\mathscr{U}(\mathbb{Z}_n) = \{\hat{k} \in \mathbb{Z}_n \mid (n, k) = 1\}$ și $(\mathscr{U}(\mathbb{Z}_n), \cdot)$ este grup comutativ, numit **grupul multiplicativ al claselor de resturi modulo n.**

*Demonstrație*

**a)** Verificăm axiomele grupului.

*(G1) Axioma asociativității:*

Avem succesiv:

$$\left(\hat{x} + \hat{y}\right) + \hat{z} = \left(\widehat{x \oplus y}\right) + \hat{z} = \widehat{(x \oplus y) \oplus z} \quad (1)$$

$$\hat{x} + \left(\hat{y} + \hat{z}\right) = \hat{x} + \widehat{y \oplus z} = \widehat{x \oplus (y \oplus z)} \quad (2)$$

Având în vedere asociativitatea adunării modulo n, din relațiile (1) și (2) rezultă $\left(\hat{x} + \hat{y}\right) + \hat{z} = \hat{x} + \left(\hat{y} + \hat{z}\right)$, $\forall\ \hat{x}, \hat{y}, \hat{z} \in \mathbb{Z}_n$.

Așadar, adunarea claselor de resturi modulo n este asociativă.

*(G2) Axioma elementului neutru:*

Pentru oricare $\hat{x} \in \mathbb{Z}_n$, avem: $\hat{x} + \hat{0} = \widehat{x \oplus 0} = \hat{x}$ și $\hat{0} + \hat{x} = \widehat{0 \oplus x} = \hat{x}$.

Așadar, $\hat{0}$ este element neutru al adunării claselor de resturi modulo n.

*(G3) Axioma elementelor simetrizabile:*

Avem: $\hat{0} + \hat{0} = \hat{0}$, deci $\hat{0}$ este propriul său simetric.

Dacă $\hat{x} \in \mathbb{Z}_n^*$, atunci există q, r $\in \mathbb{Z}$, astfel încât $x = nq + r$, $0 < r \leq$ $\leq n - 1$. Rezultă că $r' = n - r \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ și avem:

$\hat{x} + \hat{r'} = \hat{r} + \hat{r'} = \widehat{r \oplus (n-r)} = \hat{0}$ și $\hat{r'} + \hat{x} = \hat{r'} + \hat{r} = \widehat{(n-r) \oplus r} = \hat{0}$.

În concluzie, $\hat{x}$ este element simetrizabil, iar simetricul său este elementul $\hat{r'}$. Simetricul clasei de resturi $\hat{x}$ se notează cu $-\hat{x}$.

Așadar, $\left(\hat{x}\right)' = \widehat{n - x}$, pentru $\hat{x} \neq \hat{0}$ sau $-\hat{x} = \widehat{n - x}$.

Rezultă că $(\mathbb{Z}_n, +)$ este grup. Mai mult, el este grup comutativ deoarece: $\hat{x} + \hat{y} = \widehat{x \oplus y} = \widehat{y \oplus x} = \hat{y} + \hat{x}$, $\forall\ \hat{x}, \hat{y} \in \mathbb{Z}_n$.

**b)** Verificăm axiomele monoidului comutativ.

*(M1) Asociativitatea.* Pentru oricare $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z} \in \mathbb{Z}_n$, se obține:

$$\left(\hat{x} \cdot \hat{y}\right) \cdot \hat{z} = \widehat{x \odot y} \cdot \hat{z} = \widehat{(x \odot y) \odot z}, \quad (3)$$

$$\hat{x} \cdot \left(\hat{y} \cdot \hat{z}\right) = \hat{x} \cdot \widehat{y \odot z} = \widehat{x \odot (y \odot z)}. \quad (4)$$

Deoarece înmulțirea modulo n este asociativă, rezultă că:

$\left(\hat{x} \cdot \hat{y}\right) \cdot \hat{z} = \hat{x} \cdot \left(\hat{y} \cdot \hat{z}\right)$, $\forall\ \hat{x}, \hat{y}, \hat{z} \in \mathbb{Z}_n$.

Așadar, înmulțirea claselor de resturi modulo n este asociativă.

*(M2) Existența elementului neutru.* Pentru oricare $\hat{x} \in \mathbb{Z}_n$ se obține:
$\hat{x} \cdot \hat{1} = \widehat{x \odot 1} = \hat{x}$ și $\hat{1} \cdot \hat{x} = \widehat{1 \odot x} = \hat{x}$.

Astfel, $\hat{1}$ este element neutru pentru înmulțirea claselor de resturi modulo n. În concluzie, $(\mathbb{Z}_n, \cdot)$ este monoid.

Deoarece $\hat{x} \cdot \hat{y} = \widehat{x \odot y} = \widehat{y \odot x} = \hat{y} \cdot \hat{x}, \forall \hat{x}, \hat{y} \in \mathbb{Z}_n$, monoidul $(\mathbb{Z}_n, \cdot)$ este monoid comutativ.

**c)** Pentru n = 1, avem $\mathbb{Z}_1 = \{\hat{0}\}$ și $(0, 1) = 1$. Rezultă $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_1) = \{\hat{0}\}$.

Fie n ≥ 2. Atunci, $\hat{p} \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}_n)$ dacă și numai dacă există $\hat{q} \in \mathbb{Z}_n$, astfel încât $\hat{p} \cdot \hat{q} = \hat{1}$. Această relație se scrie $\widehat{pq} = \hat{1}$ sau $pq \equiv 1 \pmod{n}$.

Rezultă că există $s \in \mathbb{Z}$, astfel încât $pq + sn = 1$, relație echivalentă cu $(p, n) = 1$.

Așadar, $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_n) = \{\hat{p} \mid (p, n) = 1\}$. ■

## ➲ OBSERVAȚII

**1.** Dacă $n \in \mathbb{N}^*$ este număr prim, mulțimea elementelor inversabile în monoidul $(\mathbb{Z}_n, \cdot)$ este $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_n) = \mathbb{Z}_n^*$.

**2.** Pentru $n \in \mathbb{N}^*$ numărul numerelor naturale mai mici decât n și relativ prime cu n se notează $\varphi(n)$. Funcția $\varphi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$ se numește **indicatorul lui Euler**.
Rezultă că grupul $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_n)$ are $\varphi(n)$ elemente.

☞ ***Exemplu***

- Să se determine $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_{12})$ pentru monoidul $(\mathbb{Z}_{12}, \cdot)$ și să se alcătuiască tabla înmulțirii grupului $(\mathcal{U}(\mathbb{Z}_{12}), \cdot)$.

*Soluție:*

| $\cdot$ | $\hat{1}$ | $\hat{5}$ | $\hat{7}$ | $\widehat{11}$ |
|---|---|---|---|---|
| $\hat{1}$ | $\hat{1}$ | $\hat{5}$ | $\hat{7}$ | $\widehat{11}$ |
| $\hat{5}$ | $\hat{5}$ | $\hat{1}$ | $\widehat{11}$ | $\hat{7}$ |
| $\hat{7}$ | $\hat{7}$ | $\widehat{11}$ | $\hat{1}$ | $\hat{5}$ |
| $\widehat{11}$ | $\widehat{11}$ | $\hat{7}$ | $\hat{5}$ | $\hat{1}$ |

Conform teoremei 5 elementele inversabile în $\mathbb{Z}_{12}$ sunt clasele $\hat{1}, \hat{5}, \hat{7}, \widehat{11}$, deoarece numerele 1, 5, 7, 11 sunt relativ prime cu 12. Tabla înmulțirii este dată alăturat. Din tabla înmulțirii se observă că pentru $\forall x \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}_{12})$, există relația $\hat{x} \cdot \hat{x} = \hat{1}$, deci fiecare element este propriul său simetric (invers). De asemenea, $\hat{5} \cdot \hat{7} = \widehat{11}$, $\hat{5} \cdot \widehat{11} = \hat{7}$ și $\hat{7} \cdot \widehat{11} = \hat{5}$, adică produsul a două elemente distincte diferite de $\hat{1}$ este al treilea element diferit de $\hat{1}$.

➢ **COMENTARII**

**a)** Un grup $(K, \cdot)$, $K = \{e, a, b, c\}$ a cărui tablă a operației este redată alăturat se numește **grupul lui Klein**.

| $\cdot$ | e | a | b | c |
|---|---|---|---|---|
| e | e | a | b | c |
| a | a | e | c | b |
| b | b | c | e | a |
| c | c | b | a | e |

**b)** Un grup $(K, \cdot)$ cu un număr finit de elemente este grup de tip Klein dacă oricare element al grupului este propriul său simetric (invers).

**c)** Grupul $(\mathcal{U}(\mathbb{Z}_{12}), \cdot)$ este un grup de tip Klein cu 4 elemente.

## 3.3. Grupul permutărilor unei mulțimi

Fie M o mulțime nevidă. O funcție bijectivă $f : M \to M$ se numește **permutare** a mulțimii M. Mulțimea $S(M)$ a permutărilor mulțimii M este o submulțime a mulțimii $\mathcal{F}(M)$ a tuturor funcțiilor $f : M \to M$. Considerând operația de compunere a funcțiilor, se știe că dacă $f, g \in S(M)$, atunci $f \circ g \in S(M)$ și $g \circ f \in S(M)$.

Așadar, mulțimea $S(M)$ este parte stabilă a mulțimii $\mathcal{F}(M)$ în raport cu compunerea funcțiilor.

▣ **TEOREMA 6**

Perechea $(S(M), \circ)$ este grup.

<u>*Demonstrație*</u>

Verificăm axiomele grupului.

*(G1) Axioma asociativității.* Operația de compunere a permutărilor pe $S(M)$ este asociativă ca fiind indusă de compunerea funcțiilor pe $\mathcal{F}(M)$, care este asociativă.

*(G2) Axioma elementului neutru.* Funcția identică $1_M : M \to M$, $1_M(x) = x$, este bijectivă, deci este o permutare a mulțimii M, numită permutare identică a lui M. Deoarece $1_M \circ f = f \circ 1_M = f, \forall f \in S(M)$, rezultă că permutarea identică a mulțimii M este element neutru pentru compunerea permutărilor.

*(G3) Axioma elementelor simetrizabile.* Se știe că dacă $f \in S(M)$, atunci $f^{-1} \in S(M)$. Rezultă că orice permutare $f \in S(M)$ are un element simetric și anume permutarea $f^{-1}$.

În concluzie, $(S(M), \circ)$ este grup. ■

➲ **OBSERVAȚII**

**1.** Dacă mulțimea M are unul, sau două elemente, grupul $S(M)$ este grup comutativ.

**2.** Dacă mulțimea M are cel puțin 3 elemente, $S(M)$ este grup necomutativ.

## 3.4. Grupul simetric $S_n$

În cazul în care $M = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, grupul $S(M)$ al permutărilor lui M se notează $S_n$ și se numește **grup simetric de grad n**.

O permutare $\sigma \in S_n$ se notează astfel:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix}. \qquad (1)$$

În linia a doua sunt trecute valorile funcției σ.

Deoarece σ este o permutare a mulțimii M, rezultă că $\{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n)\} = \{1, 2, \ldots, n\}$, deci a doua linie a tabelului (1) este formată tot din elementele mulțimii M.

Dacă $\sigma, \tau \in S_n$, compunerea (produsul) celor două permutări se scrie:

$$\sigma \cdot \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ \tau(1) & \tau(2) & \tau(3) & \ldots & \tau(n) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ \sigma(\tau(1)) & \sigma(\tau(2)) & \sigma(\tau(3)) & \ldots & \sigma(\tau(n)) \end{pmatrix}.$$

☞ ***Exemplu***

◆ Fie $\sigma, \tau \in S_4$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Avem: $\sigma \cdot \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \sigma(\tau(1)) & \sigma(\tau(2)) & \sigma(\tau(3)) & \sigma(\tau(4)) \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \sigma(2) & \sigma(3) & \sigma(4) & \sigma(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix};$

$\tau \cdot \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$

Ordinul grupului simetric $S_n$ este egal cu n!.

În grupul $S_n$ elementul neutru este permutarea identică $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ 1 & 2 & 3 & \ldots & n \end{pmatrix}$.

Orice permutare $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix} \in S_n$ admite elementul simetric $\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \dots & \sigma(n) \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}$, numită **permutare inversă** sau **inversa** permutării σ.

☞ ***Exemple***

- Pentru $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in S_3$, permutarea inversă este $\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, sau ordonând prima linie, $\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.
- Inversa permutării $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \in S_5$ este permutarea:

$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

• **Transpoziție**

Fie $i, j \in \{1, 2, 3, \dots, n\} = M$, $i \neq j$. Permutarea:

$t_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i-1 & i & i+1 & \dots & j-1 & j & j+1 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & i-1 & j & i+1 & \dots & j-1 & i & j+1 & \dots & n \end{pmatrix}$ se numește **transpoziție**.

Pentru transpoziția $t_{ij}$ se folosește și notația $t_{ij} = (i, j)$. Transpoziția $(i, j)$ este o permutare particulară care schimbă între ele numai elementele i și j.

Se arată ușor că $\mathbf{t_{ij}^{-1} = t_{ij}}$, $\mathbf{t_{ij} = t_{ji}}$ și $\mathbf{t_{ij} \cdot t_{ij} = e}$.

• **Signatura unei permutări**

Fie $\sigma \in S_n$ și $i, j \in M = \{1, 2, \dots, n\}$, $i < j$. Perechea ordonată $(i, j) \in M \times M$ se numește **inversiune** a permutării σ dacă $\sigma(i) > \sigma(j)$.

Numărul tuturor inversiunilor unei permutări $\sigma \in S_n$ se notează $m(\sigma)$.

O permutare poate avea cel mult $C_n^2$ inversiuni, deci $0 \le m(\sigma) \le \frac{n(n-1)}{2}$.

Numărul $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{m(\sigma)}$ se numește **signatura (semnul)** permutării σ. Permutarea σ se numește **permutare pară** dacă $\varepsilon(\sigma) = +1$ și **permutare impară** dacă $\varepsilon(\sigma) = -1$.

***Exemple***

- Pentru permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in S_4$, inversiunile sunt: $(1, 2), (1, 3), (1, 4)$, deci $m(\sigma) = 3$, iar $\varepsilon(\sigma) = (-1)^3 = -1$. Așadar $\sigma$ este permutare impară.
- Pentru transpoziția $t_{24} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \in S_5$, inversiunile sunt $(2, 3), (2, 4), (3, 4)$, deci $\varepsilon(t_{24}) = -1$. Așadar, transpoziția $t_{24}$ este permutare impară.

**TEMĂ**

**Să se alcătuiască tabla grupului:**
**a) $(S_2, \circ)$;**
**b) $(S_3, \circ)$.**

**OBSERVAȚII**

**1.** În general, se poate arăta că orice transpoziție $t_{ij} \in S_n$ este o permutare impară.

**2.** Dacă $\sigma \in S_n$, atunci $\varepsilon(\sigma) = \prod_{1 \le i < j \le n} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j}$.

**3.** Dacă $\sigma, \tau \in S_n$, atunci $\varepsilon(\sigma \cdot \tau) = \varepsilon(\sigma) \cdot \varepsilon(\tau)$.

## 3.5. Grupuri de matrice

Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ mulțimea matricelor pătratice de ordinul n cu elemente numere complexe.

După cum se știe, mulțimea $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ împreună cu adunarea matricelor formează un grup comutativ, iar cu înmulțirea matricelor formează un monoid necomutativ.

În continuare se vor pune în evidență câteva submulțimi ale mulțimii $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, care împreună cu înmulțirea matricelor formează grupuri.

### Grupul liniar general de grad n

Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Se știe că matricea A este inversabilă în monoidul $(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \cdot)$ dacă și numai dacă $\det(A) \neq 0$. Mulțimea unităților monoidului $(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \cdot)$ se notează $GL_n(\mathbb{C})$ și avem $GL_n(\mathbb{C}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid \det(A) \in \mathbb{C}^*\}$.

**TEOREMA 7**

Perechea $(GL_n(\mathbb{C}), \cdot)$ este grup necomutativ, numit **grup liniar general de grad n peste $\mathbb{C}$**.

*Demonstrație*

Fie $A, B \in GL_n(\mathbb{C})$. Rezultă că $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B) \in \mathbb{C}^*$, deci $AB \in GL_n(\mathbb{C})$. Așadar, mulțimea $GL_n(\mathbb{C})$ este parte stabilă a mulțimii $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ în raport cu înmulțirea matricelor.

Înmulțirea matricelor este asociativă și admite elementul neutru $I_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Deoarece $\det(I_n) = 1 \in \mathbb{C}^*$ rezultă că $I_n \in GL_n(\mathbb{C})$.

În consecință, înmulțirea matricelor pe mulțimea $GL_n(\mathbb{C})$ admite element neutru și anume matricea $I_n$.

Dacă $A \in GL_n(\mathbb{C})$, atunci $\det\left(A^{-1}\right) = \dfrac{1}{\det(A)} \in \mathbb{C}^*$ și se obține că $A^{-1} \in GL_n(\mathbb{C})$.

În concluzie, $(GL_n(\mathbb{C}), \cdot)$ este grup. ■

❑ **TEMĂ DE STUDIU**

**1. Să se arate că $(GL_n(\mathbb{Q}), \cdot)$ și $(GL_n(\mathbb{R}), \cdot)$ sunt grupuri.**

**2. Fie $\mathcal{M}(\mathbb{C}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid \det(A) = 1\}$.**

**Să se arate că mulțimea $\mathcal{M}(\mathbb{C})$ împreună cu înmulțirea matricelor formează un grup necomutativ.**

### Grupul matricelor ortogonale

Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

❖ **DEFINIȚIE**

• Matricea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ se numește **matrice ortogonală** dacă ${}^tA \cdot A = I_n$.

Mulțimea matricelor ortogonale de ordinul n se notează $O_n(\mathbb{C})$.

➲ **OBSERVAȚII**

**1.** Dacă $A \in O_n(\mathbb{C})$, atunci $\det(A) = \{-1, 1\}$.

Într-adevăr, din $A \in O_n(\mathbb{C})$ se obține că ${}^tA \cdot A = I_n$. (1)

Din relația (1) se obține succesiv:

$$1 = \det(I_n) = \det\left({}^tA \cdot A\right) = \det\left({}^tA\right) \cdot \det(A) = (\det(A))^2.$$

Așadar, $\det(A) \in \{-1, 1\}$.

**2.** Există incluziunea $O_n(\mathbb{C}) \subset GL_n(\mathbb{C})$.

**▣ TEOREMA 8**

Perechea $(O_n(\mathbb{C}), \cdot)$ este un grup, numit **grupul matricelor ortogonale de ordinul n**.

<u>*Demonstrație*</u>

Fie $A, B \in O_n(\mathbb{C})$; rezultă că ${}^tA \cdot A = I_n$ și ${}^tB \cdot B = I_n$.

Avem: ${}^t(AB) \cdot (AB) = \left({}^tB \cdot {}^tA\right) \cdot (AB) = {}^tB \cdot \left({}^tA \cdot A\right) \cdot B = {}^tB \cdot B = I_n$.

Așadar, $AB \in O_n(\mathbb{C})$, iar mulțimea $O_n(\mathbb{C})$ este parte stabilă a mulțimii $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ în raport cu înmulțirea matricelor.

Să verificăm axiomele grupului.

*(G1) Axioma asociativității.* Înmulțirea matricelor pe mulțimea $O_n(\mathbb{C})$ este asociativă, fiind operație indusă de înmulțirea matricelor pe $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (proprietatea de ereditate a asociativității).

*(G2) Axioma elementului neutru.* Deoarece ${}^tI_n = I_n$ se obține că ${}^tI_n \cdot I_n = I_n$, deci $I_n \in O_n(\mathbb{C})$. Rezultă că $I_n$ este elementul neutru al înmulțirii matricelor pe mulțimea $O_n(\mathbb{C})$.

*(G3) Axioma elementelor simetrizabile.*

Fie $A \in O_n(\mathbb{C})$. Din observația 1 rezultă că $\det(A) = \pm 1$, deci matricea A este inversabilă în monoidul $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Din relația ${}^tA \cdot A = I_n$ se deduce că $A^{-1} = {}^tA$. Folosind această relație se obține ${}^t\left(A^{-1}\right) \cdot A^{-1} = {}^t\left({}^tA\right) \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = I_n$, deci $A^{-1} \in O_n(\mathbb{C})$, iar elementul simetric al matricei A în $O_n(\mathbb{C})$ este matricea $A^{-1}$. ■

**❑ <u>TEMĂ</u>**

**Fie $O_n(\mathbb{R}) = \left\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^tA \cdot A = I_n\right\}$.**

**Să se arate că $(O_n(\mathbb{R}), \cdot)$ este grup, numit grupul matricelor ortogonale de ordinul n peste $\mathbb{R}$.**

## *Exercițiu rezolvat*

☒ Fie $A \in O_2(\mathbb{R})$. Să se arate că există $\alpha \in \mathbb{R}$, astfel încât $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ sau $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$.

<u>*Soluție*</u>

Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in O_2(\mathbb{R})$.

Din condiția ${}^{t}A \cdot A = I_2$ se obține: $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sau

$\begin{pmatrix} a^2+c^2 & ab+cd \\ ab+cd & b^2+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Rezultă sistemul: $\begin{cases} a^2+c^2=1 \\ b^2+d^2=1 \\ ab+cd=0 \end{cases}$.

Din ecuația $a^2+c^2=1$ se deduce că există $\alpha \in \mathbb{R}$, astfel încât $a = \cos\alpha$. Rezultă $c = \pm\sin\alpha$, iar din a treia ecuație se obține $b\cos\alpha = \pm d\sin\alpha$. Substituind d în ecuația $b^2+d^2=1$ se obține $b=\pm\sin\alpha$ și $d=\pm\cos\alpha$.

Așadar, $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ sau $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$.

❑ **TEMĂ DE STUDIU**

**a) Fie** $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. **Să se verifice dacă** $A, B \in O_2(\mathbb{C})$ **și dacă** $AB \neq BA$.

**b) Să se studieze dacă pentru oricare** $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, **grupul** $O_n(\mathbb{C})$ **este necomutativ.**

## 3.6. Grupul rădăcinilor de ordinul n ale unității

Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Se știe că ecuația $z^n = 1$ are exact n soluții numere complexe. Soluțiile acestei ecuații se numesc **rădăcini de ordinul n ale unității** și au forma: $z_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$, $k = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$.

Notând $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$, conform formulei lui Moivre se obține: $z_k = \varepsilon^k$, $k = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$.

Mulțimea rădăcinilor de ordinul n ale unității se notează $U_n$ și avem:

$U_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$ sau

$$U_n = \left\{\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n} \;\middle|\; k \in \{0,1,2,\ldots,n-1\}\right\} = \{1, \varepsilon, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^{n-1}\} \quad (1)$$

▣ **TEOREMA 9**

Perechea $(U_n, \cdot)$ este un grup comutativ în raport cu înmulțirea numerelor complexe.

<u>*Demonstrație*</u>

Să arătăm că $U_n$ este parte stabilă a lui $\mathbb{C}$ în raport cu înmulțirea numerelor complexe.

Fie $z_1, z_2 \in U_n$. Rezultă că $z_1^n = 1$ și $z_2^n = 1$, și astfel:

$(z_1 \cdot z_2)^n = z_1^n \cdot z_2^n = 1$, deci $z_1 z_2 \in U_n$.

Verificăm axiomele grupului.

*(G1) Axioma asociativității:*

Înmulțirea numerelor complexe este asociativă și rezultă că înmulțirea indusă pe mulțimea $U_n$ este, de asemenea, asociativă (proprietatea de ereditate a asociativității).

*(G2) Axioma elementului neutru:*

Se observă ușor că $z_0 = 1$ este element neutru în raport cu înmulțirea pe $U_n$.

*(G3) Axioma elementelor simetrizabile:*

Fie $z \in U_n$. Rezultă că $z^n = 1$ și $\left(\frac{1}{z}\right)^n = \frac{1}{z^n} = 1$, deci $\frac{1}{z} \in U_n$. Din $z \cdot \frac{1}{z} = 1$ se obține că $\frac{1}{z}$ este elementul simetric al lui z, deci z este inversabil în $U_n$.

În cazul în care $z = \varepsilon^p \in U_n$, simetricul lui z este $z' = \varepsilon^{n-p}$.

*(G4) Axioma comutativității:*

Din proprietatea de ereditate a comutativității se obține că înmulțirea pe $U_n$ este comutativă, fiind indusă de înmulțirea numerelor complexe.

În concluzie, $(U_n, \cdot)$ este grup comutativ. Ordinul grupului $U_n$ este egal cu n.

❑ **TEMĂ DE STUDIU**

**1. Să se alcătuiască tabla grupurilor:**
**a) $U_2$; b) $U_3$; c) $U_4$; d) $U_6$.**

**2. Fie $\varepsilon \in U_n$ și $p, q \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$. Să se arate că $\varepsilon^{p+q} = \varepsilon^r$, unde r este restul împărțirii numărului p + q la n.**

# EXERCIȚII ȘI PROBLEME

## EXERSARE

**E1.** Pe mulțimea $\mathbb{C}$ se definește operația algebrică $\mathbb{C}\times\mathbb{C}\to\mathbb{C},\ (x, y)\to$ $\to x\circ y = x + y + 5i$.
Să se arate că $(\mathbb{C}, \circ)$ este grup comutativ.

**E2.** Pe mulțimea $\mathbb{Z}$ se consideră legile de compoziție $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{Z},\ (x, y)\to$ $\to x\circ y = x + y + 6$ și $(x, y)\to x\perp y =$ $= x + y - 5$. Să se arate că $(\mathbb{Z}, \circ)$ și $(\mathbb{Z}, \perp)$ sunt grupuri comutative.

**E3.** Pe mulțimea M se consideră legea de compoziție $M\times M\to M,\ (x, y)\to x\circ y$.
Să se studieze dacă $(M, \circ)$ este grup, în cazurile:
a) $M = \mathbb{Z},\ x\circ y = x + y + 3$;
b) $M = 2\mathbb{Z},\ x\circ y = x + y + 4$;
c) $M = \mathbb{R},\ x\circ y = xy - 10x - 10y + 110$;
d) $M = \mathbb{C},\ x\circ y = ixy$;
e) $M = \mathbb{C},\ x\circ y = x + y + ixy$;
f) $M = (-1, +\infty),\ x\circ y = x + y + xy$;
g) $M = (0, 1),\ x\circ y = \dfrac{xy}{2xy - x - y + 1}$;
h) $M = \mathbb{C}\setminus\{-i\},\ x\circ y = xy +$ $+ i(x + y) - 1 - i$.

**E4.** Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se consideră legile de compoziție $G\times G\to G$,
$(x, y)\to x\circ y \overset{def}{=} \sqrt{x^2 + y^2}$ și
$(x, y)\to x\perp y \overset{def}{=} \sqrt[3]{x^3 + y^3}$.
Care dintre perechile $(G, \circ), (G, \perp)$ este un grup?

**E5.** Pe mulțimea $G = (-2, 2)$ se consideră legile de compoziție $G\times G\to G$,
$x\circ y \overset{def}{=} \dfrac{x + y}{4 + xy}$ și $x\perp y \overset{def}{=} \dfrac{4x + 4y}{4 + xy}$.
Care dintre perechile $(G, \circ), (G, \perp)$ este grup comutativ?

**E6.** Se consideră:
$G_1 = \{x + y\sqrt{3} \mid x, y\in\mathbb{Z},\ x^2 - 3y^2 = 1\}$
și $G_2 = \{x + y\sqrt{3} \mid x, y\in\mathbb{Q},\ x^2 - 3y^2 = 1\}$.
Care dintre mulțimile $G_1$ și $G_2$ este grup abelian în raport cu înmulțirea numerelor reale?

**E7.** Se consideră mulțimea:
$$G = \left\{A = \begin{pmatrix} a & bi \\ bi & a\end{pmatrix} \middle| a, b\in\mathbb{R},\ \det(A)\neq 0\right\}.$$
Să se arate că G este un grup în raport cu înmulțirea matricelor.

**E8.** Fie $\mathcal{M} = \left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}^n \middle| n\in\mathbb{N},\ n\geq 1\right\}\subset$ $\subset\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.
a) Să se arate că $(\mathcal{M}, \cdot)$ este grup comutativ.
b) Să se studieze dacă operația algebrică $A\perp B = A^4\cdot B^4$, definită pe mulțimea $\mathcal{M}$, determină pe aceasta o structură de grup.

**E9.** Fie $A_n = \{\sigma\in S_n \mid \sigma$ este permutare pară$\}$.
a) Să se arate că $(A_n, \circ)$ este grup, *(grupul altern de ordinul n)*.
b) Pentru ce valori ale lui n grupul $A_n$ este comutativ?

## APROFUNDARE

**A1.** Fie $G = \left\{ \begin{pmatrix} 2x & 3y \\ y & 2x \end{pmatrix} \middle| \; x, y \in \mathbb{Q}, 4x^2 - 3y^2 = 1 \right\}$. Să se arate că G este grup comutativ în raport cu înmulțirea matricelor.

**A2.** Fie $G = \left\{ A = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} \middle| \; x, y \in \mathbb{Z}_3, \det(A) = \hat{1} \right\}$.

a) Să se determine câte elemente are mulțimea G.
b) Să se arate că $(G, \cdot)$ este grup.

**A3.** Pe mulțimea $E = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ se consideră legea de compoziție $E \times E \to E$, $(a, b) \circ (c, d) = (ac, ad + b)$. Să se arate că $(E, \circ)$ este grup.

**A4.** Se consideră $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \; x \in \mathbb{R} \right\}$ și legea de compoziție $G \times G \to G$, $(A, B) \to A \circ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} AB \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Perechea $(G, \circ)$ este grup?

**A5.** Pe mulțimea $G = \mathbb{R} \setminus \{a\}$ se definește legea de compoziție $G \times G \to G$, $x \circ y = xy - 2x - 2y + b$. Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât $(G, \circ)$ să fie un grup comutativ.

**A6.** Fie $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_a(x) = ax + 1 - a$ și $\mathcal{F} = \{f_a \mid a \in \mathbb{R}^*\}$. Să se arate că $(\mathcal{F}, \circ)$ este grup.

**A7.** Fie $a \in \mathbb{R}$ și funcțiile $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_a(x) = x \cdot \operatorname{ch}(a) + \sqrt{1 + x^2}\operatorname{sh}(a)$.
Dacă $\mathcal{F} = \{f_a \mid a \in \mathbb{R}\}$, să se arate că $(\mathcal{F}, \circ)$ este grup abelian.

**A8.** Fie $f_\alpha : [1, +\infty) \to [1, +\infty)$,
$$f_\alpha(x) = \frac{\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)^\alpha + \left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right)^\alpha}{2}$$
și $\mathcal{F} = \{f_a \mid a \in (0, \infty)\}$.

a) Să se arate că dacă $\alpha, \beta \in (0, +\infty)$, atunci $f_\alpha \circ f_\beta = f_{\alpha\beta}$.

b) Să se arate că $(\mathcal{F}, \circ)$ este un grup abelian.

**A9.** Să se determine $a, b \in \mathbb{Z}^*$, astfel încât legea de compoziție $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $(x, y) \to x \circ y \overset{def}{=} ax + by + 1$ să determine pe $\mathbb{Z}$ o structură de grup.

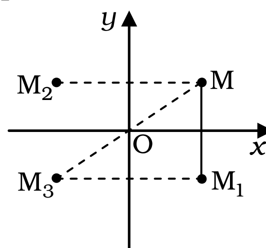
**A10.** Fie $(G_1, \circ)$, $(G_1, *)$ două grupuri și $E = G_1 \times G_2$. Pe mulțimea E se definește legea de compoziție $E \times E \to E$, $(a, b) \perp (c, d) \overset{def}{=} (a \circ c, b * d)$. Să se arate că $(E, \perp)$ este un grup, numit produsul direct al grupurilor $G_1$ și $G_2$.

**A11.** Să se alcătuiască tabla grupului:
a) $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +)$;
b) $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3, +)$;
c) $(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2, +)$.

**A12.** Pentru un punct oarecare M din planul $\mathcal{P}$ raportat la reperul cartezian xOy se notează cu $M_1, M_2, M_3$ simetricele acestuia față de Ox, Oy, respectiv punctul O. Fie funcțiile $s_i : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$, $i = \overline{1, 3}$ date de relațiile: $s_0(M) = M$, $s_1(M) = M_1$, $s_2(M) = M_2$, $s_3(M) = M_3$ și mulțimea $\mathcal{F} = \{s_0, s_1, s_2, s_3\}$. Să se arate că:

a) $\mathcal{F}$ este parte stabilă în raport cu operația „∘" de compunere a funcțiilor;

b) $(\mathcal{F}, \circ)$ este grup comutativ, (grupul lui Klein).



# 4 Reguli de calcul într-un grup

## 4.1. Puterea unui element într-un grup

Fie $(G, \cdot)$ un grup în notație multiplicativă și $a_1, a_2, \ldots, a_n \in G$, $n \geq 1$. În grupul $(G, \cdot)$ se definește produsul $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$ în mod recursiv, astfel:

$a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = (a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{n-1}) \cdot a_n.$

În cazul particular când $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = a$, produsul $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$ se notează $a^n$. Prin convenție, pentru n = 0 se consideră $a^0 = e$, e fiind elementul neutru al grupului.

**▣ TEOREMA 10**

Fie $(G, \cdot)$ un grup în notație multiplicativă și $a \in G$. Avem:

**a)** $a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \forall\ m, n \in \mathbb{N}$;

**b)** $\left(a^m\right)^n = a^{m \cdot n}, \forall\ m, n \in \mathbb{N}$.

*Demonstrație*

Folosind asociativitatea operației în grup se obține:

**a)** $a^m \cdot a^n = \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{m} \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{n} = \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{m+n} = a^{m+n}$.

**b)** $\left(a^m\right)^n = \underbrace{(a^m \cdot a^m \cdot \ldots \cdot a^m)}_{n} = \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{m} \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{m} \ldots \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{m} = \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{m \cdot n} = a^{m \cdot n}$. ■

**➲ OBSERVAȚIE**

În notație aditivă, proprietățile anterioare se scriu:

$\underbrace{(a + a + \ldots + a)}_{m} = m \cdot a$, $ma + na = (m+n)a$ și $(m \cdot n) \cdot a = m \cdot (n \cdot a)$.

Pentru cazul în care $n \in \mathbb{Z}$ și $n < 0$, puterea $a^n$ se definește astfel:

$a^n = \left(a^{-1}\right)^{-n} = \left(a^{-n}\right)^{-1}$, unde $a^{-1}$ este elementul simetric al elementului a.

**▣ TEOREMA 11**

Fie $(G, \cdot)$ un grup și $a \in G$. Atunci:

**a)** $\left(a^n\right)^{-1} = \left(a^{-1}\right)^n, \forall\ n \in \mathbb{Z}$;

**b)** $a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \forall\ m, n \in \mathbb{Z}$;

**c)** $\left(a^m\right)^n = a^{m \cdot n}, \forall\ m, n \in \mathbb{Z}$.

<u>*Demonstrație*</u>

**a)** Pentru $n < 0$ rezultă:

$$\left(a^n\right)^{-1} = \left(\left(a^{-1}\right)^{-n}\right)^{-1} = \left(\left(a^{-1}\right)^{-1}\right)^{-n} = a^{-n} = \left(a^{-1}\right)^n.$$

**b)** Pentru $m, n \in \mathbb{N}$ se aplică teorema 10.
Pentru $m < 0$, $n < 0$, putem scrie:

$$a^m \cdot a^n = a^m \cdot \left(a^{-n}\right)^{-1} = \left(a^{-m}\right)^{-1} \cdot \left(a^{-n}\right)^{-1} = \left(a^{-n} \cdot a^{-m}\right)^{-1} = \left(a^{-n-m}\right)^{-1} = a^{m+n}.$$

Fie $m > 0$ și $n < 0$. Dacă $m > |n|$, atunci există $r \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $m = -n + r$.

Rezultă $a^m \cdot a^n = a^{-n+r} \cdot a^n = \left(a^r \cdot a^{-n}\right) \cdot a^n = a^r \cdot a^{-n+n} = a^r = a^{m+n}$.

În cazul $m < |n|$ se obține $-m - n = r > 0$.

Rezultă: $a^m \cdot a^n = \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{m} \cdot \left(a^{-1}\right)^{-n} = \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{m} \cdot \underbrace{(a^{-1} \cdot a^{-1} \cdot\ \ldots \cdot a^{-1})}_{-n} =$

$= \underbrace{(a^{-1} \cdot a^{-1} \cdot\ \ldots \cdot a^{-1})}_{-m-n} = \left(a^{-1}\right)^{-m-n} = a^{m+n}$.

**c)** Dacă $m, n \in \mathbb{N}$ proprietatea este adevărată. Dacă $m < 0$, $n > 0$, atunci avem: $\left(a^m\right)^n = \left(a^{-m}\right)^{-n} = a^{(-m)(-n)} = a^{mn}$. Analog se analizează celelalte situații. ■

## 4.2. Legi de simplificare

**▣ TEOREMA 12**

Fie $(G, \circ)$ un grup.

**a)** Dacă $x, y, z \in G$ și $x \circ y = x \circ z$, atunci $y = z$, (legea simplificării la stânga).

**b)** Dacă $x, y, z \in G$ și $x \circ z = y \circ z$, atunci $x = y$, (legea simplificării la dreapta).

<u>*Demonstrație*</u>

**a)** Fie $x \circ y = x \circ z$. Compunem la stânga cu simetricul $x^{-1}$ al lui x și rezultă $x^{-1} \circ (x \circ y) = x^{-1} \circ (x \circ z) \Rightarrow \left(x^{-1} \circ x\right) \circ y = \left(x^{-1} \circ x\right) \circ z \Rightarrow e \circ y =$
$= e \circ z \Rightarrow y = z$.

**b)** Fie $x \circ z = y \circ z$. Compunem la dreapta cu simetricul lui z și rezultă $(x \circ z) \circ z^{-1} = (y \circ z) \circ z^{-1} \Rightarrow x \circ \left(z \circ z^{-1}\right) = y \circ \left(z \circ z^{-1}\right) \Rightarrow x \circ e = y \circ e \Rightarrow$ $\Rightarrow x = y$. ■

➲ **OBSERVAȚII**

**1.** În notație aditivă relațiile anterioare se scriu:
$x + y = x + z \Rightarrow y = z$ și $x + z = y + z \Rightarrow x = y$, reprezentând legile reducerii.
În particular, $x + x = x \Rightarrow x = 0$.

**2.** Dacă $(G, \cdot)$ este un grup finit, atunci în tabla lui Cayley a grupului, pe fiecare linie (coloană) toate elementele sunt distincte.
Într-adevăr, dacă, de exemplu pe linia i ar fi două elemente egale, ele ar avea forma $a_i \cdot a_k = a_i \cdot a_m$. Din legile de simplificare se obține $a_k = a_m$, ceea ce nu se poate.

## *Exercițiu rezolvat*

☒ Fie mulțimea $M = \{a, b, c, d\}$ și legea de compoziție $M \times M \to M$, $(x, y) \to x \cdot y$, astfel încât $(M, \cdot)$ este un grup. Să se alcătuiască tabla grupului, știind că b · a = b și b · b = c.

*Soluție*

Tabla incompletă a grupului, conform enunțului, arată ca în figura alăturată.

| · | a | b | c | d |
|---|---|---|---|---|
| a | | | | |
| b | b | c | | |
| c | | | | |
| d | | | | |

Deoarece b · a = b, rezultă b · a = b · e și din legea simplificării la stânga se obține a = e. Pe linia a doua a tablei grupului trebuie să apară și elementele a și d. Dacă b · d = d, ar rezulta b = e = a și nu se poate. Rămâne numai posibilitatea b · d = a și b · c = d.

Astfel, a doua linie este b, c, d, a.

Analog, a doua coloană este b, c, d, a.

Produsul c · d nu poate fi egal cu c sau d, deoarece acestea apar și pe linia a treia și nici cu a, deoarece acesta apare deja pe coloana a patra. Rezultă că c · d = b și, analog, d · c = b.
Observând elementele de pe liniile 3 și 4 se obține c · c = a și d · d = a.

## *Probleme rezolvate*

☒ **1.** Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Să se arate că:

**a)** $A^n = \begin{pmatrix} a_n & a_{n+1} \\ a_{n+1} & a_{n+2} \end{pmatrix}$, unde $a_n \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

**b)** Pentru oricare $m, n \in \mathbb{N}^*$ are loc relația $a_{m+n} = a_{m+1} \cdot a_{n+1} + a_m \cdot a_n$.

*Soluție*

**a)** Mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ este parte stabilă a lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ în raport cu înmulțirea matricelor.

Rezultă că $A^n \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ pentru oricare $n \in \mathbb{N}^*$. Fie $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$, $n \geq 1$.

Din egalitatea $A^{n+1} = A^n \cdot A = A \cdot A^n$ se obține pentru $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} \text{ sau } \begin{pmatrix} b_n & a_n + b_n \\ d_n & c_n + d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_n & d_n \\ a_n + c_n & b_n + d_n \end{pmatrix}.$$

Așadar, $b_n = c_n$ și $d_n = a_n + b_n$. Rezultă că $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ b_n & a_n + b_n \end{pmatrix}$, $n \in \mathbb{N}^*$, iar din egalitatea $A^{n+1} = A^n \cdot A$ se obține $\begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \\ b_{n+1} & a_{n+1} + b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_n & a_n + b_n \\ a_n + b_n & a_n + 2b_n \end{pmatrix}$.

Rezultă $b_n = a_{n+1}$ și astfel $A^n = \begin{pmatrix} a_n & a_{n+1} \\ a_{n+1} & a_n + a_{n+1} \end{pmatrix}$.

Din egalitatea $A^{n+2} = A^n \cdot A^2$ se obține:

$$\begin{pmatrix} a_{n+2} & a_{n+3} \\ a_{n+3} & a_{n+2} + a_{n+3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & a_{n+1} \\ a_{n+1} & a_n + a_{n+1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n + a_{n+1} & a_n + 2a_{n+1} \\ a_n + 2a_{n+1} & 2a_n + 3a_{n+1} \end{pmatrix}$$

și, prin urmare, $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$.

Așadar, $A^n = \begin{pmatrix} a_n & a_{n+1} \\ a_{n+1} & a_{n+2} \end{pmatrix}$.

**b)** Folosim egalitatea $A^{m+n} = A^m \cdot A^n$ și rezultă:

$$\begin{pmatrix} a_{m+n} & a_{m+n+1} \\ a_{m+n+1} & a_{m+n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_m & a_{m+1} \\ a_{m+1} & a_{m+2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_n & a_{n+1} \\ a_{n+1} & a_{n+2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_m \cdot a_n + a_{m+1} \cdot a_{n+1} & a_m \cdot a_{n+1} + a_{m+1} \cdot a_{n+2} \\ a_n \cdot a_{m+1} + a_{n+1} \cdot a_{m+2} & a_{m+1} \cdot a_{n+1} + a_{m+2} \cdot a_{n+2} \end{pmatrix}.$$

Din această egalitate matriceală se obține relația $a_{m+n} = a_m \cdot a_n + a_{m+1} \cdot a_{n+1}$ pentru oricare $m, n \in \mathbb{N}^*$.

☒ **2.** Fie $(G, \cdot)$ un grup. Să se arate că pentru oricare $a, b, c \in G$, ecuațiile $ax = b$, $ya = b$ și $azb = c$ au soluție unică.

*Soluție*

Să rezolvăm prima ecuație.

Avem succesiv: $ax = b \Leftrightarrow ax = eb \Leftrightarrow ax = \left(aa^{-1}\right)b \Leftrightarrow ax = a\left(a^{-1}b\right)$.

Folosind legea de simplificare la stânga se obține $x = a^{-1}b$.

Analog $ya = b \Leftrightarrow ya = be \Leftrightarrow ya = b\left(a^{-1}a\right) \Leftrightarrow ya = \left(ba^{-1}\right)a$.

Folosind regula de simplificare la dreapta se obține $y = ba^{-1}$.

Pentru ecuația $azb = c$, avem succesiv: $azb = c \Leftrightarrow a(zb) = c \Leftrightarrow zb = a^{-1}c \Leftrightarrow z = a^{-1}cb^{-1}$.

**❑ REȚINEM!**

$ax = b \Rightarrow x = a^{-1}b$

$ya = b \Rightarrow y = ba^{-1}$

$azb = c \Rightarrow z = a^{-1}cb^{-1}$

## EXERCIȚII ȘI PROBLEME

### EXERSARE

**E1.** Pe mulțimea $G = \mathbb{C} \setminus \{1\}$ se definește legea de compoziție $G \times G \to G$, $(x, y) \to x \circ y \overset{def}{=} x + y - xy$.

a) Să se arate că $(G, \circ)$ este grup comutativ.

b) Să se calculeze în grupul G: $(1+i)^2$, $(1-i)^2$ și $i^5$.

**E2.** Fie $G = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 2a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \, a \in \mathbb{Z}\right\}$.

a) Să se arate că G este grup comutativ în raport cu înmulțirea matricelor.

b) Dacă $A \in G$, să se calculeze $A^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

**E3.** Se consideră mulțimea $G = (0, +\infty) \setminus \{1\}$ și legea de compoziție $G \times G \to G$, $(x, y) \to x \circ y \overset{def}{=} x^{\log_2 y}$.

a) Să se arate că $(G, \circ)$ este grup comutativ.

b) Să se determine $4^n$ și $x^n$, $n \geq 1$, $x \in G$.

**E4.** Pe mulțimea $G = (4, +\infty)$ se definește legea de compoziție $G \times G \to G$, $(x, y) \to x \circ y \overset{def}{=} xy - 4(x + y) + 20$.

a) Să se arate că $(G, \circ)$ este un grup comutativ.

b) În grupul $(G, \circ)$ să se determine $5^n$ și $x^n$, $n \geq 1$ și $x \in G$.

**E5.** Fie $(G, \cdot)$ un grup și $a, b \in G$ astfel încât $ab = ba$. Să se arate că:

a) $a^2b = ba^2$; b) $a^2b^3 = b^3a^2$;

c) $a^nb = ba^n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

**E6.** Fie $(G, \cdot)$ un grup, $a, b \in G$ și $x = aba^{-1}$. Să se calculeze:

a) $x^2$; b) $x^5$; c) $x^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

### APROFUNDARE

**A1.** Fie $(G, \cdot)$ un grup și $a, b \in G$, astfel încât $ab = ba$. Să se arate că:

a) $a^nb = ba^n$, $\forall\, n \in \mathbb{Z}$;

b) $a^mb^n = b^na^m$, $\forall\, m, n \in \mathbb{Z}$.

**A2.** Fie $(G, \cdot)$ un grup și $a, b \in G$, astfel încât $a = b^2$ și $b = a^2$. Să se arate că:

a) dacă $x = aba$, atunci $x^3 = e$;

b) dacă $x = aba^{-1}$, atunci $x^3 = e$.

**A3.** În grupul $(G, \cdot)$ se consideră elementele a și b, astfel încât $ab = e$. Să se arate că $ba = e$.

**A4.** Fie $(G, \cdot)$ un grup și $a, b \in G$, astfel încât $ab^2 = e$. Să se arate că $ab = ba$.

**A5.** Fie $(G, \cdot)$ un grup și $x, y \in G$ astfel încât $x^5 = e$ și $y^2 = xyx^{-1}$. Să se arate că $y^{31} = e$.

**A6.** În grupul $(G, \cdot)$ se consideră elementele a, b, c astfel încât $abc = e$. Să se arate că: a) $bca = e$; b) $cab = e$.

**A7.** Se consideră grupul $(G, \cdot)$ și $a, b \in G$, astfel încât $aba = bab$. Să se arate că $a^5 = e$, dacă și numai dacă $b^5 = e$.

**A8.** Fie $(G, \cdot)$ un grup și $a, b \in G$. Să se arate că:

a) dacă $x = aba^{-1}$, atunci $x^n = ab^na^{-1}$, $\forall\, n \in \mathbb{Z}$;

b) dacă $\exists\, n \in \mathbb{Z}^*$, astfel ca $\left(aba^{-1}\right)^n = e$, atunci $b^n = e$.

**A9.** Fie $(A, \cdot)$ un grup, $A = \{a, b, c, d, e\}$. Dacă $ab = d$, $ca = e$, $dc = b$, să se alcătuiască tabla grupului.

**A10.** Fie $(G, \cdot)$ un grup. Să se arate că G este comutativ dacă are loc una dintre situațiile:

a) $x^2 = e$, $\forall\, x \in G$;

b) $(xy)^2 = x^2y^2$, $\forall\, x, y \in G$;

c) $(xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1}$, $\forall\, x, y \in G$;

d) $xy^{-1} = yx^{-1}$, $\forall\, x, y \in G \setminus \{e\}$;

e) $x^3 = e$ și $x^2y^2 = y^2x^2$, $\forall\, x, y \in G$;

f) $x^3 = e$ și $(xy)^2 = (yx)^2$, $\forall\, x, y \in G$;

g) $xy^{-1} = x^{-1}y$, $\forall\, x, y \in G \setminus \{e\}$.

**A11.** Fie $\sigma, \tau, \theta \in S_4$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $\theta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Să se rezolve ecuațiile:

a) $x\sigma = \tau$; b) $\sigma x = \tau$;

c) $\sigma x \tau = \theta$; d) $x\sigma = \sigma x$;

e) $x^2 = \sigma$; f) $x^2 = \theta$;

g) $\sigma^{201} \cdot x = \theta^{407}$.

## DEZVOLTARE

**D1.** Fie $(G, \cdot)$ un grup cu proprietatea $xy = zx \Rightarrow y = z$. Să se arate că grupul G este comutativ.

**D2.** Fie $(G, \cdot)$ un grup și $a \in G$. Să se arate că dacă $xa^3 = ax^3$, $\forall\, x \in G$, atunci G este comutativ.

**D3.** Se consideră un grup $(G, \cdot)$, cu proprietatea că există $m, n \in \mathbb{N}^*$, $(m, n) = 1$, astfel încât $(xy)^m = (yx)^m$ și $(xy)^n = (yx)^n$, $\forall\, x, y \in G$. Să se arate că G este grup comutativ.

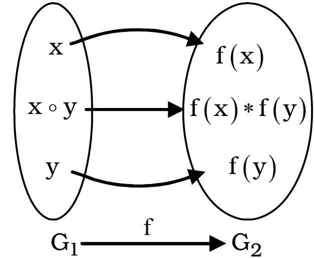
**D4.** Fie $(G, \cdot)$ un grup. Să se arate că dacă există $n \in \mathbb{N}^*$, astfel încât pentru oricare $x, y \in G$, $(xy)^i = x^iy^i$, $i \in \{n, n+1, n+2\}$, atunci grupul G este comutativ.

# 5 Morfisme de grupuri

Fie $(G_1, \circ)$ și $(G_2, *)$ două grupuri.

## ❖ DEFINIȚII

- Funcția $f : G_1 \to G_2$ se numește **morfism** (omomorfism) de grupuri dacă $f(x \circ y) = f(x) * f(y),\ \forall\ x, y \in G_1$.
- Funcția $f : G_1 \to G_2$ se numește **izomorfism** de grupuri dacă f este morfism de grupuri și este funcție bijectivă.
- Grupurile $(G_1, \circ)$ și $(G_2, *)$ se numesc **grupuri izomorfe** și se scrie $G_1 \simeq G_2$, dacă între ele există cel puțin un izomorfism de grupuri.




☞ ***Exemple***

- Funcția $f : \mathbb{Z} \to \{-1, 1\},\ f(n) = (-1)^n$ este morfism între grupurile $(\mathbb{Z}, +)$ și $(\{-1, 1\}, \cdot)$.

  Într-adevăr, avem: $f(m+n) = (-1)^{m+n} = (-1)^m \cdot (-1)^n = f(m) \cdot f(n),\ \forall\ m, n \in \mathbb{Z}$.
- Funcția $f : \mathbb{R} \to (0, \infty),\ f(x) = 2^x$ este izomorfism între grupurile $(\mathbb{R}, +)$ și $((0, \infty), \cdot)$. Într-adevăr, funcția exponențială f este bijectivă și: $f(x+y) = 2^{x+y} = 2^x \cdot 2^y = f(x) \cdot f(y),\ \forall\ x, y \in \mathbb{R}$.

  Așadar, grupurile $(\mathbb{R}, +)$ și $((0, \infty), \cdot)$ sunt izomorfe.
- Fie $I_n(\mathbb{C}) \subset M_n(\mathbb{C})$ mulțimea matricelor de ordinul n, inversabile. Funcția $f : I_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}^*,\ f(A) = \det(A)$ este morfism între grupurile $(I_n(\mathbb{C}), \cdot)$ și $(\mathbb{C}^*, \cdot)$, deoarece $f(A \cdot B) = \det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B) = f(A) \cdot f(B),\ \forall\ A, B \in I_n(\mathbb{C})$.

## *Problemă rezolvată*

☒ Pe mulțimea $\mathbb{Z}$ se consideră legile de compoziție:

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ (x, y) \to x \circ y \overset{\text{def}}{=} x + y + 1;$$

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ (x, y) \to x \perp y \overset{\text{def}}{=} x + y + 5.$$

**a)** Să se arate că $(\mathbb{Z}, \circ)$ și $(\mathbb{Z}, \perp)$ sunt grupuri.

**b)** Să se determine $a, b \in \mathbb{Z}$, pentru care funcția $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = ax + b$, este izomorfism între grupurile $(\mathbb{Z}, \circ)$ și $(\mathbb{Z}, \perp)$.

*Soluție*

**a)** Se verifică axiomele grupului.

**b)** Funcția f este morfism de grupuri dacă $f(x \circ y) = f(x) \perp f(y)$, $\forall$ x, y $\in \mathbb{Z}$. (1)

Din relația (1) se obține: $a(x+y+1)+b = ax+b+ay+b+5$, $\forall$ x, y $\in \mathbb{Z}$, relație din care rezultă a = b + 5.

Așadar, $f(x) = ax + a - 5$.

Pentru ca f să fie bijectivă este necesar ca f să fie injectivă și surjectivă.

Din surjectivitatea funcției f, pentru y = a – 4 trebuie să existe x $\in \mathbb{Z}$, astfel încât f(x) = a – 4.

Rezultă că ax = 1, de unde se obține $a \in \{1, -1\}$.

Funcțiile f sunt: $f(x) = x - 4$ și $f(x) = -x - 6$, care se constată că sunt bijective.

**▣ TEOREMA 13**

Fie $(G_1, \cdot)$ și $(G_2, \cdot)$ două grupuri cu elementele neutru $e_1$ și $e_2$, și $f : G_1 \to G_2$ un morfism de grupuri. Atunci:

**a)** $f(e_1) = e_2$;

**b)** $f\left(x^{-1}\right) = \left(f(x)\right)^{-1}$, $\forall\ x \in G_1$;

**c)** $f\left(x^{n}\right) = \left(f(x)\right)^{n}$, $\forall\ x \in G_1$ și n $\in \mathbb{Z}$.

*Demonstrație*

**a)** Avem: $f(e_1) = f(e_1 \cdot e_1) \overset{\text{f morfism}}{=} f(e_1) \cdot f(e_1)$.

Simplificând cu $f(e_1)$ în grupul $G_2$ se obține $f(e_1) = e_2$.

**b)** Avem: $f(x) \cdot f\left(x^{-1}\right) = f\left(x \cdot x^{-1}\right) = f(e_1) = e_2$, $\forall$ x $\in$ G.

Din această relație rezultă: $f(x) \cdot \left(f(x)\right)^{-1} = f(x) \cdot f\left(x^{-1}\right)$ și, aplicând legea de simplificare la stânga cu $f(x)$, se obține relația cerută, $f\left(x^{-1}\right) = \left(f(x)\right)^{-1}$, $\forall\ x \in G_1$.

**c)** Pentru n = 0 rezultă $f(e_1) = e_2$, adică relația a).

Pentru $n \in \mathbb{N}^*$, avem succesiv:

$$f\left(x^{n}\right) = f\left(x \cdot x^{n-1}\right) = f(x) \cdot f\left(x^{n-1}\right) = \ldots = \underbrace{f(x) \cdot f(x) \cdot \ldots \cdot f(x)}_{n} = \left(f(x)\right)^{n}.$$

Pentru $n < 0$, avem succesiv:

$$f\left(x^n\right) = f\left(\left(x^{-1}\right)^{-n}\right) = \left(f\left(x^{-1}\right)\right)^{-n} = \left(f(x)\right)^{-1\cdot(-n)} = \left(f(x)\right)^n. \ \blacksquare$$

### ➲ OBSERVAȚIE

- În scriere aditivă, relațiile anterioare se scriu:
  **a)** $f(0) = 0$;
  **b)** $f(-x) = -f(x), \forall\ x \in G_1$;
  **c)** $f(nx) = n f(x), \forall\ x \in G_1$ și $n \in \mathbb{Z}$.

### ▣ TEOREMA 14

Fie grupurile $(G_1, \cdot), (G_2, \cdot)$ și $(G_3, \cdot)$.

**a)** Dacă $f : G_1 \to G_2$ și $g : G_2 \to G_3$ sunt morfisme de grupuri, atunci $h : G_1 \to G_3$, $h = g \circ f$ este morfism de grupuri.

**b)** Dacă $f : G_1 \to G_2$ este izomorfism de grupuri, atunci $f^{-1} : G_2 \to G_1$ este izomorfism de grupuri.

*Demonstrație*

**a)** Avem succesiv:

$$h(xy) = g(f(xy)) = g(f(x)\cdot f(y)) = g(f(x))\cdot g(f(y)) = h(x)\cdot h(y), \forall\ x, y \in G_1.$$

**b)** Funcția $f^{-1} : G_2 \to G_1$ este bijectivă.

Fie $y_1, y_2 \in G_2$. Deoarece $f : G_1 \to G_2$ este funcție bijectivă, rezultă că există $x_1, x_2 \in G_1$, astfel încât $f(x_1) = y_1$ și $f(x_2) = y_2$.

Avem: $f^{-1}(y_1 \cdot y_2) = f^{-1}(f(x_1)\cdot f(x_2)) = f^{-1}(f(x_1 \cdot x_2)) = x_1 \cdot x_2 =$
$= f^{-1}(y_1)\cdot f^{-1}(y_2)$.

Așadar, $f^{-1}$ este izomorfism de grupuri. ■

### ❖ DEFINIȚII

Fie $(G, \cdot)$ un grup.
- Un morfism $f : G \to G$ se numește **endomorfism** al grupului G.
- Un izomorfism $f : G \to G$ se numește **automorfism** al grupului G.

Mulțimea endomorfismelor unui grup G se notează $End(G)$, iar mulțimea automorfismelor lui G se notează $Aut(G)$.

**▣ TEOREMA 15**

Fie $(G, \cdot)$ un grup. Atunci:

**a)** $(\text{End}(G), \circ)$ este monoid;

**b)** $(\text{Aut}(G), \circ)$ este grup.

*Demonstrație*

**a)** Din teorema 14 rezultă că dacă $f, g \in \text{End}(G)$, atunci și $f \circ g \in \text{End}(G)$. Compunerea funcțiilor este asociativă, deci și compunerea endomorfismelor lui G este asociativă. Funcția identică $1_G$ este endomorfism al lui G. În concluzie, $(\text{End}(G), \circ)$ este monoid.

**b)** Dacă $f, g \in \text{Aut}(G)$, din teorema 14 rezultă că $f \circ g \in \text{Aut}(G)$. Compunerea funcțiilor pe $\text{Aut}(G)$ este asociativă și admite pe $1_G \in \text{Aut}(G)$ element neutru. Dacă $f \in \text{Aut}(G)$, atunci și $f^{-1} \in \text{Aut}(G)$, având în vedere teorema 14. Așadar, $(\text{Aut}(G), \circ)$ este grup. Se observă că $(\text{Aut}(G), \circ)$ este grupul unităților monoidului $(\text{End}(G), \circ)$. ■

☞ ***Exemplu***

- Fie $(\mathbb{Z}, +)$ grupul aditiv al numerelor întregi.

**a)** Să se determine monoidul $(\text{End}(\mathbb{Z}), \circ)$.

**b)** Să se determine $\text{Aut}(\mathbb{Z})$ și să se arate că grupurile $(\text{Aut}(\mathbb{Z}), \circ)$ și $(\mathbb{Z}_2, +)$ sunt izomorfe.

*Soluție*

**a)** Fie $f \in \text{End}(\mathbb{Z})$. Rezultă că $f(n) = f(n \cdot 1) = nf(1), \forall n \in \mathbb{Z}$, (teorema 13).

Fie $a = f(1)$; atunci un endomorfism al lui $\mathbb{Z}$ este funcția $f_a : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, f_a(x) = ax$.

În concluzie, $\text{End}(\mathbb{Z}) = \{f_a \mid a \in \mathbb{Z}\}$.

**b)** Deoarece $\text{Aut}(\mathbb{Z}) \subset \text{End}(\mathbb{Z})$, rezultă că automorfismele lui $\mathbb{Z}$ sunt de forma $f_a(x) = ax$. Dacă funcția $f_a$ este surjectivă, atunci rezultă că există $x \in \mathbb{Z}$ astfel încât $f_a(x) = 1$. Din această relație rezultă că $ax = 1$ și de aici $a \in \{-1, 1\}$.

Așadar, $\text{Aut}(\mathbb{Z}) = \{f_1, f_{-1}\}$.

Definim $\varphi : \mathbb{Z}_2 \to \text{Aut}(\mathbb{Z})$, astfel: $\varphi(\hat{0}) = f_1, \varphi(\hat{1}) = f_{-1}$.

Evident, funcția $\varphi$ este bijectivă. De asemenea, $\varphi$ este și morfism de grupuri, deoarece:

$\varphi(\hat{0} + \hat{0}) = \varphi(\hat{0}) = f_1$ și $\varphi(\hat{0}) \circ \varphi(\hat{0}) = f_1 \circ f_1 = f_1$;

$\varphi(\hat{0} + \hat{1}) = \varphi(\hat{1}) = f_{-1}$ și $\varphi(\hat{0}) \circ \varphi(\hat{1}) = f_1 \circ f_{-1} = f_{-1}$;

$\varphi(\hat{1} + \hat{1}) = \varphi(\hat{0}) = f_1$ și $\varphi(\hat{1}) \circ \varphi(\hat{1}) = f_{-1} \circ f_{-1} = f_1$.

Așadar, are loc izomorfismul de grupuri: $(\mathbb{Z}_2, +) \simeq (\text{Aut}(\mathbb{Z}), \circ)$.

## ➢ COMENTARIU

**a)** Cele două table ale operațiilor grupurilor sunt redate alăturat.

| $\circ$ | $f_1$ | $f_{-1}$ |
|---|---|---|
| $f_1$ | $f_1$ | $f_{-1}$ |
| $f_{-1}$ | $f_{-1}$ | $f_1$ |

,

| $+$ | $\hat{0}$ | $\hat{1}$ |
|---|---|---|
| $\hat{0}$ | $\hat{0}$ | $\hat{1}$ |
| $\hat{1}$ | $\hat{1}$ | $\hat{0}$ |

Se observă că aceste table au aceeași structură cu următoarea tablă:

| $\cdot$ | e | a |
|---|---|---|
| e | e | a |
| a | a | e |

.

**b)** În general, două grupuri cu un număr finit de elemente sunt izomorfe dacă tablele operațiilor lor sunt la fel structurate.

### ❑ TEMĂ DE PROIECT

**1. Să se arate că funcția $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}^*$, $f(z) = |z|$ este morfism între grupurile $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ și $(\mathbb{R}^*, \cdot)$.**

**2. Se notează $\mathscr{C}(\mathbb{R})$ mulțimea funcțiilor continue pe $\mathbb{R}$ și $\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ mulțimea funcțiilor derivabile pe $\mathbb{R}$ cu derivata continuă. Să se arate că:**

**a) $(\mathscr{C}(\mathbb{R}), +)$, $(\mathscr{C}^1(\mathbb{R}), +)$ sunt grupuri comutative.**

**b) Să se arate că funcția $\varphi : \mathscr{C}^1(\mathbb{R}) \to \mathscr{C}(\mathbb{R})$, $\varphi(f) = f'$, unde $f'$ este derivata funcției f, este morfism de grupuri.**

**c) Să se determine mulțimea $M = \{f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}) \mid \varphi(f) = 0\}$.**

## EXERCIȚII ȘI PROBLEME

### EXERSARE

**E1.** Fie $(G, +)$ un grup, unde $G = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$, și $a \in G$. Să se arate că $f : G \to G$, $f(x) = ax$ este un endomorfism de grupuri. În ce caz f este automorfism de grupuri?

**E2.** Fie $(\mathbb{C}, +)$ grupul aditiv al numerelor complexe. Să se arate că $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \bar{z}$ este automorfism de grupuri.

**E3.** Fie $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ grupul multiplicativ al numerelor complexe. Să se arate că $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$, $f(z) = \bar{z}$ este automorfism de grupuri.

**E4.** Notăm $\mathbb{Q}(\sqrt{7}) = \{a + b\sqrt{7} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$.

Să se arate că:

a) $(\mathbb{Q}(\sqrt{7}), +)$ este grup comutativ;

b) $f : \mathbb{Q}(\sqrt{7}) \to \mathbb{Q}(\sqrt{7})$, $f(a + b\sqrt{7}) = a - b\sqrt{7}$ este automorfism de grupuri.

**E5.** Se consideră mulțimea:

$$M = \left\{ A(x) \;\middle|\; A(x) = \begin{pmatrix} x & x \\ 0 & x \end{pmatrix},\ x \in \mathbb{R} \right\}.$$

Să se arate că:

a) $(M, +)$ este grup;

b) $f : \mathbb{R} \to M$, $f(x) = A(x)$ este izomorfism de grupuri între $(\mathbb{R}, +)$ și $(M, +)$.

**E6.** Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se definesc legile de compoziție $x \circ y = x + y + a$, $x \perp y = x + ay - 1$. Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ pentru care $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + b$, să fie izomorfism între grupurile $(\mathbb{R}, \circ)$ și $(\mathbb{R}, \perp)$.

**E7.** Fie $G = (-3, 3)$ și legea de compoziție pe G, $x \circ y = \dfrac{9x + 9y}{9 + xy}$. Să se arate că:
a) $(G, \circ)$ este grup comutativ;
b) $f : G \to \mathbb{R},\ f(x) = \log_2 \dfrac{3 + x}{3 - x}$ este izomorfism între grupurile $(G, \circ)$ și $(\mathbb{R}, +)$.

**E8.** Fie $F = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ unde $f_i : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$, $i = \overline{1, 4}$ și $f_1(x) = x$, $f_2(x) = -x$, $f_3(x) = \dfrac{1}{x}$, $f_4(x) = -\dfrac{1}{x}$.
Să se arate că:
a) $(F, \circ)$ este grup comutativ;
b) $(F, \circ)$ este izomorf cu grupul lui Klein.

**E9.** Fie $F = \{f_1, f_2, f_3\}$ unde $f_i : \mathbb{R}\setminus\{0, 1\} \to \mathbb{R}\setminus\{0, 1\}$, $i = \overline{1, 3}$ și $f_1(x) = x$, $f_2(x) = \dfrac{1}{1 - x}$, $f_3(x) = 1 - \dfrac{1}{x}$. Să se arate că:
a) $(F, \circ)$ este grup comutativ;
b) $(F, \circ) \simeq (\mathbb{Z}_3, +)$.

**E10.** Fie $(G, \cdot)$ un grup și $a \in G$. Pe G se definește legea de compoziție $G \times G \to G,\ (x, y) \to x \circ y = xay$. Să se arate că $(G, \circ)$ este un grup și $(G, \circ) \simeq (G, \cdot)$.

## APROFUNDARE

**A1.** Fie $G = \left\{ A(a) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \ a \in \mathbb{R} \right\}$. Să se arate că:
a) $(G, \cdot)$ este un grup comutativ;
b) $(G, \cdot) \simeq (\mathbb{R}, +)$.

**A2.** Fie $G = \left\{ A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ -a & 1 & -\dfrac{a^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \ a \in \mathbb{R} \right\}$.
Să se arate că:
a) $(G, \cdot)$ este un grup comutativ;
b) $(G, \cdot) \simeq (\mathbb{R}, +)$.

**A3.** Fie $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ și mulțimea $M = \{A^n \mid n \geq 1\}$. Să se arate că $(M, \cdot)$ este un grup comutativ izomorf cu un grup multiplicativ de numere complexe.

**A4.** Pe mulțimea $G = (3, +\infty)$ se consideră legea de compoziție $x \circ y = xy - 3x - 3y + 12$.
a) Să se arate că $(G, \circ)$ este un grup comutativ.
b) Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$, pentru care $f : \mathbb{R}_+^* \to G,\ f(x) = ax + b$ este izomorfism între grupurile $((0, +\infty), \cdot)$ și $(G, \circ)$.

**A5.** Fie $G_1 = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \middle| \ \alpha \in \mathbb{R} \right\}$ și $G_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Să se arate că $(G_1, \cdot)$ și $(G_2, \cdot)$ sunt grupuri izomorfe.

**A6.** Fie $G_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| \ a, b \in \mathbb{Q},\ a^2 - 2b^2 = 1 \right\}$ și $G_2 = \{x + y\sqrt{2} \mid x, y \in \mathbb{Q},\ x^2 - 2y^2 = 1\}$. Să se arate că grupurile $(G_1, \cdot)$ și $(G_2, \cdot)$ sunt izomorfe.

**A7.** Fie $G = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ și legea de compoziție $G \times G \to G$, $(x, y) \to x \circ y = \arctg(\tg x + \tg y)$. Să se arate că:

a) $(G, \circ)$ este un grup comutativ;

b) $(G, \circ) \simeq (\mathbb{R}, +)$.

**A8.** Fie $G = (1, +\infty)$ și legea de compoziție $G \times G \to G$, $(x, y) \to x \circ y = \sqrt{x^2y^2 - x^2 - y^2 + 2}$.

a) Să se arate că $(G, \circ)$ este un grup comutativ.

b) Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$, pentru care funcția $f:(0, \infty) \to G$, $f(x) = \sqrt{ax+b}$ este izomorfism între grupurile $((0, +\infty), \cdot)$ și $(G, \circ)$.

**A9.** Fie $(G, \cdot)$ un grup și $a \in G$. Să se arate că $f_a : G \to G$, $f_a(x) = axa^{-1}$ este automorfism al grupului G ($f_a$ se numește automorfism interior al grupului G).

**A10.** Fie $(G, \cdot)$ un grup. Să se arate că $f : G \to G$, $f(x) = x^{-1}$ este automorfism al grupului G dacă și numai dacă G este comutativ.

**A11.** Se consideră funcția $f_a : G \to G$,
$$f_a(x) = \begin{cases} ax, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$
și $F = \{f_a \mid a \in (0, +\infty)\}$. Să se arate că:

a) $(F, \circ)$ este grup comutativ;

b) $(F, \circ) \simeq ((0, +\infty), \cdot)$.

**A12.** Să se arate că grupurile $(G, \cdot)$ cu trei elemente sunt izomorfe cu $(\mathbb{Z}_3, +)$.

## DEZVOLTARE

**D1.** Să se arate că:

a) $(\mathbb{R}, +) \not\simeq (\mathbb{R}^*, \cdot)$;

b) $(\mathbb{Q}^*, \cdot) \not\simeq (\mathbb{Q}_+^*, \cdot)$.

**D2.** Fie $(G_1, \cdot)$ și $(G_2, \cdot)$ două grupuri abeliene și $\mathrm{Hom}(G_1, G_2) = \{f : G_1 \to G_2 \mid f \text{ morfism de grupuri}\}$. Să se arate că $(\mathrm{Hom}(G_1, G_2), +)$ este un grup abelian.

**D3.** Fie $(G, \cdot)$ un grup abelian. Să se arate că grupurile $(\mathbb{Z}, +)$ și $(\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, G), +)$ sunt izomorfe.

**D4.** Să se determine: a) $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$; b) $\mathrm{Hom}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q})$, c) $\mathrm{Hom}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z})$.

**D5.** Să se arate că:

a) grupul $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +)$ este izomorf cu grupul lui Klein $(K, \cdot)$;

b) grupul $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3, +)$ este izomorf cu grupul $(\mathbb{Z}_6, +)$;

c) $(\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n, +) \simeq (\mathbb{Z}_{mn}, +) \Leftrightarrow (m, n) = 1$.

# 6 Subgrupuri

Fie $(G, \cdot)$ un grup în notație multiplicativă și $H \subset G$ o submulțime nevidă.

### ❖ DEFINIȚIE

• Mulțimea H se numește **subgrup** al lui G, dacă perechea $(H, \cdot)$ formează grup.

☞ ***Exemple***

- $(\mathbb{Z}, +)$ este subgrup al grupurilor aditive $(\mathbb{Q}, +), (\mathbb{R}, +), (\mathbb{C}, +)$.
- $((0, +\infty), \cdot)$ este subgrup al grupurilor multiplicative $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ și $(\mathbb{C}^*, \cdot)$.
- Fie $GL_n(\mathbb{C})$ mulțimea matricelor inversabile de ordin n cu elemente numere complexe și M mulțimea matricelor de ordinul n cu determinantul egal cu 1. Perechea $(M, \cdot)$ este subgrup al grupului $(GL_n(\mathbb{C}), \cdot)$.
- Fie $(K, \cdot)$ grupul lui Klein. Mulțimile $H_1 = \{e, a\}, H_2 = \{e, b\}, H_3 = \{e, c\}$ sunt subgrupuri ale lui K.
- Mulțimea $H = \{\hat{0}, \hat{2}\}$ este un subgrup al grupului $(\mathbb{Z}_4, +)$.

## ❖ DEFINIȚII

- Dacă $(G, \cdot)$ este un grup cu elementul neutru e, atunci $(\{e\}, \cdot)$ și $(G, \cdot)$ sunt subgrupuri ale lui G, numite **subgrupuri improprii**.
- Orice subgrup al lui G diferit de subgrupurile $\{e\}$ și G se numesc **subgrupuri proprii**.

### ▣ TEOREMA 16

Fie $(G, \cdot)$ un grup și H un subgrup al lui G.

**a)** Dacă $e \in G$ și $e' \in H$ sunt elementele neutre în G și H, atunci $e = e'$.

**b)** Dacă $x \in H$, iar $x'$ și $x''$ sunt simetricele lui x în G, respectiv în H, atunci $x' = x''$.

*Demonstrație*

**a)** Folosind proprietatea elementului neutru rezultă $e \cdot e' = e'$, în grupul G, și $e' \cdot e' = e'$ în H. Din egalitatea $e \cdot e' = e' \cdot e'$, cu legea de simplificare la dreapta, se obține $e = e'$.

**b)** În grupul G, avem $x' \cdot x = e$, iar în grupul H există egalitatea $x'' \cdot x = e$. Rezultă $x' \cdot x = x'' \cdot x$. Folosind legea de simplificare la dreapta se obține $x' = x''$. ■

Din teoremă rezultă că elementul neutru al unui grup $(G, \cdot)$ este element neutru în oricare subgrup H al său, iar simetricul unui element $x \in H$ coincide cu simetricul lui x în G.

### ▣ TEOREMA 17

Fie $(G, \cdot)$ un grup și H o submulțime nevidă a lui G. Următoarele afirmații sunt echivalente:

**a)** H este subgrup al lui G;

**b)** $\forall\ x, y \in H \Rightarrow xy^{-1} \in H$;
**c) 1.** H este parte stabilă a lui G;
**2.** $\forall\ x \in H \Rightarrow x^{-1} \in H$.

<u>*Demonstrație*</u>

**a) ⇒ b)** Dacă H este subgrup al lui G, atunci $(H, \cdot)$ este grup. Fie x, $y \in H$. Din teorema 16 rezultă că $y^{-1} \in H$. Deoarece H este parte stabilă a lui G se obține că $xy^{-1} \in H$.

**b) ⇒ c)** Fie $x \in H$. Atunci $x^{-1} \in H$ și din b) rezultă $x \cdot x^{-1} \in H$, deci $e \in H$. Folosind b) pentru $x = e$ și $y = x^{-1}$ se obține că $x^{-1} = e \cdot x^{-1} \in H$. Așadar, H conține odată cu un element și simetricul acestui element.

Fie $x, y \in H$. Atunci $y^{-1} \in H$, iar din b) rezultă că $x \cdot y = x \cdot \left(y^{-1}\right)^{-1} \in H$. Așadar, H este parte stabilă a lui G.

**c) ⇒ a)** Să arătăm că $(H, \cdot)$ este grup. Din ipoteză rezultă că H este parte stabilă a lui G în raport cu operația indusă. Proprietatea de asociativitate a operației grupului G este moștenită și de operația indusă pe H. Dacă $x \in H$, din ipoteza că $x^{-1} \in H$ rezultă că $e = x \cdot x^{-1} \in$ $\in H$.

În concluzie, (H, ·) este grup, deci este subgrup al lui G. ■

## *Probleme rezolvate*

☒ **1.** Fie $(G_1, \cdot)$ și $(G_2, \cdot)$ două grupuri cu elementele neutre $e_1$ și $e_2$, iar $f : G_1 \to G_2$ un morfism de grupuri. Să se arate că mulțimile:

$\operatorname{Ker} f = \{x \in G_1 \mid f(x) = e_2\} \subset G_1$, $\operatorname{Im} f = \{f(x) \mid x \in G_1\} \subset G_2$

sunt subgrupuri ale grupurilor $G_1$, respectiv $G_2$.

<u>*Soluție*</u>

Să arătăm că $\operatorname{Ker} f$ este subgrup al grupului $G_1$. Fie $x, y \in \operatorname{Ker} f$. Atunci $f(x) = e_2$ și $f(y) = e_2$ și se obține: $f\left(x \cdot y^{-1}\right) = f(x) \cdot f\left(y^{-1}\right) = f(x) \cdot$ $\cdot (f(y))^{-1} = e_2 \cdot e_2^{-1} = e_2$, deci $xy^{-1} \in \operatorname{Ker} f$. Conform teoremei 17 rezultă că Ker f este subgrup al grupului $G_1$.

Să arătăm că Im f este subgrup al grupului $G_2$.

Fie $x, y \in \operatorname{Im} f$. Atunci există $x_1, y_1 \in G_1$, astfel încât $f(x_1) = x$ și $f(y_1) = y$.

Din $x_1 \cdot y_1 \in G_1$ se obține că $x \cdot y^{-1} = f(x_1) \cdot (f(y_1))^{-1} = f(x_1) \cdot f\left(y_1^{-1}\right) =$ $= f\left(x_1 \cdot y_1^{-1}\right) \in \operatorname{Im} f,$ deci Im f este subgrup al grupului $G_2$.

Subgrupurile Ker f și Im f se numesc **nucleul**, respectiv **imaginea** morfismului f.

☒ **2.** Fie $(G, \cdot)$ un grup și H o submulțime nevidă și finită a lui G. Să se arate că următoarele afirmații sunt echivalente:
**a)** H este subgrup al grupului G;
**b)** H este parte stabilă a lui G în raport cu operația grupului G.

*Soluție*

**a)** $\Rightarrow$ **b)** Se aplică teorema 17.
**b)** $\Rightarrow$ **a)** Fie $H = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ parte stabilă a lui G.

Vom arăta că dacă $x \in H,$ atunci $x^{-1} \in H.$ Deoarece H este parte stabilă a lui G rezultă că elementele $xx_1, xx_2, ..., xx_n \in H,$ deci $\{xx_1, xx_2, ..., xx_n\} \subset H.$ Deoarece elementele $xx_1, xx_2, ..., xx_n$ sunt distincte două câte două, rezultă că $\{xx_1, xx_2, ..., xx_n\} = H.$ Din $x \in H$ rezultă că există $i \in \{1, 2, ..., n\},$ astfel încât $x = x \cdot x_i.$ Folosind legea de simplificare la stânga în grupul G se obține că $x_i = e,$ deci $e \in H.$ Atunci există $j \in \{1, 2, ..., n\}$ astfel încât $e = x \cdot x_i$, de unde rezultă că $x^{-1} \in H.$ Conform teoremei 17 se obține că H este subgrup al grupului G.

☒ **3.** Fie $(G, \cdot)$ un grup și $H_1, H_2,$ subgrupuri ale lui G. Să se arate că $H_1 \cap H_2$ este subgrup al lui G.

*Soluție*

Fie $x, y \in H_1 \cap H_2.$ Rezultă că $x, y \in H_1$ și $x, y \in H_2.$ Deoarece $H_1$ și $H_2$ sunt subgrupuri, conform teoremei 17 rezultă că $x \cdot y^{-1} \in H_1$ și $x \cdot y^{-1} \in H_2,$ de unde se obține că $x \cdot y^{-1} \in H_1 \cap H_2.$ Așadar, $H_1 \cap H_2$ este subgrup al grupului G.

### ➲ OBSERVAȚII

- Dacă $H_1, H_2, ..., H_n$ sunt subgrupuri ale lui G, atunci $H_1 \cap H_2 \cap ... \cap \cap H_n$ este subgrup al lui G.
- Dacă $H_1, H_2$ sunt subgrupuri proprii ale lui G, atunci $G \neq H_1 \cup H_2.$ Într-adevăr, dacă presupunem că $G = H_1 \cup H_2,$ fie $x, y \in G,$ astfel încât $x \in G \setminus H_2$ și $y \in G \setminus H_1.$ Deoarece $x, y \in G,$ rezultă că $xy \in H_1$ sau

$xy \in H_2$. Dacă, de exemplu, $xy \in H_1$, atunci există $h_1 \in H_1$, astfel ca $xy = h_1$. Atunci $y = x^{-1} \cdot h_1 \in H_1$, în contradicție cu $y \in G \setminus H_1$. Analog se arată că $xy \notin H_2$. Așadar, $G \neq H_1 \cup H_2$. Rezultă că orice grup nu se poate scrie ca reuniune de două subgrupuri proprii.

**Subgrupurile grupului aditiv $(\mathbb{Z}, +)$**

Fie $(\mathbb{Z}, +)$ grupul aditiv al numerelor întregi.

**▣ TEOREMA 18**

Fie $H \subset \mathbb{Z}$ o mulțime nevidă. Atunci H este subgrup al grupului $(\mathbb{Z}, +)$ dacă și numai dacă există $n \in \mathbb{N}$, astfel încât $H = n\mathbb{Z} = \{nx \mid x \in \mathbb{Z}\}$.

*Demonstrație*

„$\Leftarrow$“ Să arătăm că pentru $\forall\ n \in \mathbb{N}$, mulțimea $H = n\mathbb{Z}$ este subgrup al lui $\mathbb{Z}$.

• Pentru $n = 0$ rezultă $0 \cdot \mathbb{Z} = \{0\}$ și se obține subgrupul nul.

• Pentru $n = 1$ rezultă $1 \cdot \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ și se obține subgrupul total.

Fie $n \geq 2$ și $H = n\mathbb{Z}$. Dacă $x, y \in n\mathbb{Z}$, există $p, q \in \mathbb{Z}$, astfel încât $x = np$ și $y = nq$. Atunci $x - y = np - nq = n(p - q) \in n\mathbb{Z} = H$.

Conform teoremei 17, H este subgrup.

„$\Rightarrow$“ Să arătăm că dacă H este subgrup, atunci există $n \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $H = n\mathbb{Z}$. Dacă H este subgrup impropriu, atunci $H = \{0\} = 0\mathbb{Z}$ sau $H = \mathbb{Z} = 1\mathbb{Z}$.

Fie H subgrup propriu al lui $\mathbb{Z}$ și $x \in H$. Rezultă că $-x \in H$, deci mulțimea H conține și numere strict pozitive. Notăm cu n cel mai mic număr pozitiv nenul din H.

Deoarece H este subgrup, rezultă că $0 \in H$, iar din faptul că $n \in H$ se obține că $n \cdot p \in H$, pentru oricare $p \in \mathbb{Z}$. În concluzie, $n\mathbb{Z} \subset H$.

Să arătăm incluziunea reciprocă $H \subset n\mathbb{Z}$.

Fie $x \in H$. Din teorema împărțirii cu rest, rezultă că există $p, r \in \mathbb{Z}$ astfel încât $x = np + r,\ 0 \leq r < n - 1$. Dacă $r \neq 0$, din relația $r = x - np \in H$, rezultă că $r \in H$. Deoarece $r < n$, se contrazice faptul că n este cel mai mic număr pozitiv din H. Așadar, $r = 0$ și $x = np \in n\mathbb{Z}$, de unde se obține $H \subset n\mathbb{Z}$.

În concluzie, $H = n\mathbb{Z}$ și teorema este demonstrată. ■

## *Problemă rezolvată*

☒ Fie $(\mathbb{Z}, +)$ grupul aditiv al numerelor întregi. Să se determine intersecția subgrupurilor $2\mathbb{Z}$ și $3\mathbb{Z}$.

*Soluție*

Fie $x \in 2\mathbb{Z} \cap 3\mathbb{Z}$; rezultă că $x \in 2\mathbb{Z}$ și $x \in 3\mathbb{Z}$, deci există $m, n \in \mathbb{Z}$, astfel încât $x = 2m$ și $x = 3n$.

Rezultă că $2m = 3n$ și se obține că n este număr par, $n = 2k$. Așadar, $x = 6k \in 6\mathbb{Z}$, deci $2\mathbb{Z} \cap 3\mathbb{Z} \subset 6\mathbb{Z}$.

Să arătăm și incluziunea reciprocă. Fie $x \in 6\mathbb{Z}$, deci $x = 6p$, cu $p \in \mathbb{Z}$.

Atunci $x = 6p = 2 \cdot (3p) \in 2\mathbb{Z}$ și $x = 3 \cdot (2p) \in 3\mathbb{Z}$, deci $x \in 2\mathbb{Z} \cap 3\mathbb{Z}$.

În concluzie, $2\mathbb{Z} \cap 3\mathbb{Z} = 6\mathbb{Z}$.

## EXERCIȚII ȘI PROBLEME

### EXERSARE

**E1.** **Fie** $M = \left\{2^n \mid n \in \mathbb{Z}\right\}$. **Să se arate că** $(M, \cdot)$ **este subgrup al grupului** $\left(\mathbb{Q}^*, \cdot\right)$.

**E2.** **Se consideră mulțimea** $\mathcal{M} = \left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R}^*\right\}$. **Să se arate că** $(\mathcal{M}, \cdot)$ **este subgrup al grupului** $\left(U\left(\mathcal{M}_2(\mathbb{C})\right), \cdot\right)$.

**E3.** **Fie** $\mathcal{M} = \left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R}^*\right\}$ **și** $\mathcal{M}_1 = \left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{R}^*\right\}$.

**a) Să se arate că** $(\mathcal{M}, \cdot)$ **și** $(\mathcal{M}_1, \cdot)$ **sunt grupuri.**

**b)** $(\mathcal{M}_1, \cdot)$ **este subgrup al grupului** $(\mathcal{M}, \cdot)$.

**E4.** **Fie** $M \subset \mathbb{Z}_6$, $M = \left\{\hat{0}, \hat{2}, \hat{4}\right\}$.

**a) Să se arate că** $(M, +)$ **este subgrup al lui** $(\mathbb{Z}_6, +)$.

**b) Să se arate că dacă** $A \subset \mathbb{Z}_6$ **este parte stabilă în raport cu adunarea și** $\hat{1} \in A$, **atunci** $A = \mathbb{Z}_6$. **Generalizare.**

**E5.** **Fie** $(G, \cdot)$ **un grup. Să se arate că:**

**a) mulțimea** $\mathbb{Z}(G) = \{x \in G \mid ax = xa, \forall\ a \in G\}$ **este subgrup al lui G, numit centrul grupului G;**

**b) G este comutativ dacă și numai dacă** $G = \mathbb{Z}(G)$.

**E6.** **Să se determine subgrupurile grupului lui Klein,** $(K, \cdot)$, $K = \{e, a, b, c\}$ **și să se arate că grupul K se poate scrie ca reuniunea a trei subgrupuri proprii.**

**E7.** **Fie** $M \subset \mathbb{Z}$, $M = \{2x + 3y \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$. **Să se arate că** $(M, +)$ **este subgrup al lui** $(\mathbb{Z}, +)$.

**E8.** **Să se arate că mulțimile:**

$\mathcal{M}_1 = \left\{\begin{pmatrix} a & 2b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R}\right\}$,

$\mathcal{M}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \middle| a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ **sunt subgrupuri ale grupului** $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +)$.

**E9.** **Fie** $SL_2(\mathbb{R}) = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \middle| \det(A) = \pm 1 \right\}$.

**Să se arate că** $(SL_2(\mathbb{R}), \cdot)$ **este subgrup al grupului** $GL_2(\mathbb{R})$, **numit** ***grupul special liniar.***

## APROFUNDARE

**A1.** **Fie** $(G, \cdot)$ **un grup și** $H_1, H_2$ **două subgrupuri ale sale. Să se arate că dacă** $H_1 \cup H_2$ **este subgrup al lui G, atunci** $H_1 \subset H_2$ **sau** $H_2 \subset H_1$.

**A2.** **Fie** $(G_1, \cdot)$ **și** $(G_2, \cdot)$ **două grupuri și** $H \subset G_1$, **un subgrup al lui** $G_1$. **Să se arate că dacă** $f : G_1 \to G_2$ **este morfism de grupuri, atunci mulțimea** $f(H) = \{f(x) \mid x \in H\}$ **este subgrup al lui** $G_2$.

**A3.** **Fie** $H_1$ **și** $H_2$ **subgrupuri ale grupului comutativ** $(G, \perp)$ **și** $H = \{h_1 \perp h_2 \mid h_1 \in H_1 \text{ și } h_2 \in H_2\}$. **Să se arate că** $(H, \perp)$ **este subgrup al lui G.**

**A4.** **Fie** $(G, \cdot)$ **un grup și** $H = \{x \in G \mid x^2 = e\}$. **Mulțimea H este subgrup al lui G?**

**A5.** **Fie** $(G, \cdot)$ **un grup și H un subgrup propriu al său. Să se arate că dacă** $f, g : G \to G$ **sunt două morfisme de grupuri, astfel încât** $f(x) = g(x)$, $\forall\, x \in G \setminus H$, **atunci** $f = g$.

**A6.** **Să se determine subgrupurile G ale grupului** $(\mathbb{R}, +)$ **astfel încât funcția** $f : G \to \mathbb{R}^*$, $f(x) = \cos(\pi x)$ **să fie morfism între grupurile** $(G, +)$ **și** $(\mathbb{R}^*, \cdot)$.

**A7.** **Fie** $(G, \cdot)$ **un grup și** $f : G \to G$ **endomorfism de grupuri. Să se arate că:**
**a)** $H = \{x \in G \mid f(x) = x\}$ **este subgrup al grupului G;**
**b) dacă G este comutativ, atunci mulțimea** $H_1 = \{x \in G \mid f(x) = x^{-1}\}$ **este subgrup al lui G.**

**A8.** **Fie** $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$ **un morfism între grupurile** $(\mathbb{Z}, +)$ **și** $(\mathbb{Z}_n, +)$. **Să se determine Ker f.**

**A9.** **Fie** $m, n \in \mathbb{N}^*$. **Să se demonstreze că** $n\mathbb{Z} \cap m\mathbb{Z} = [m, n]\mathbb{Z}$, **unde** $[m, n]$ **este cel mai mic multiplu comun al numerelor m și n.**

**A10.** **Fie** $(G, \cdot)$ **un grup, H un subgrup al său și** $x \in G$. **Să se arate că mulțimea** $xHx^{-1} = \{xhx^{-1} \mid h \in H\}$ **este subgrup al lui G.**

# 7 Grupuri finite

Fie $(G, \cdot)$ un grup. Grupul $(G, \cdot)$ se numește **grup finit** dacă mulțimea G este finită. Dacă $G = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$, numărul $n \in \mathbb{N}^*$ se numește **ordinul grupului** și se notează $\text{ord}(G)$.

Deoarece $\text{ord}(\mathbb{Z}_n) = n$ rezultă că există grupuri finite de orice ordin.

## 7.1. Subgrupul generat de un element

Fie $(G, \cdot)$ un grup și $a \in G$. Se notează $\langle a \rangle = \left\{a^n \mid n \in \mathbb{Z}\right\}$ mulțimea puterilor întregi ale elementului a.

Mulțimea $\langle a \rangle$ este parte stabilă a lui G.

Dacă $x, y \in \langle a \rangle$, atunci există $p, q \in \mathbb{Z}$, astfel încât $x = a^p$ și $y = a^q$. Atunci $xy^{-1} = a^p \cdot \left(a^q\right)^{-1} = a^p \cdot a^{-q} = a^{p-q} \in \langle a \rangle$.

Conform teoremei 16 rezultă că $\langle a \rangle$ este subgrup al grupului G, numit **subgrupul ciclic generat** de elementul $a \in G$.

☞ ***Exemple***

- $\langle e \rangle = \{e\}$ și este subgrupul nul al grupului G.
- În grupul $(\mathbb{Z}, +)$ avem: $\langle 2 \rangle = 2\mathbb{Z}$, $\langle 3 \rangle = 3\mathbb{Z}$ și, în general, $\langle n \rangle = n\mathbb{Z}$.
- În grupul $\left(\mathbb{C}^*, \cdot\right)$ avem: $\langle i \rangle = \{-1, 1, i, -i\} = U_4$.
- În grupul $(\mathbb{Z}_8, +)$ avem: $\langle \hat{2} \rangle = \left\{\hat{0}, \hat{2}, \hat{4}, \hat{6}\right\}$, $\langle \hat{4} \rangle = \left\{\hat{0}, \hat{4}\right\}$, $\langle \hat{1} \rangle = \mathbb{Z}_8$.

➲ **OBSERVAȚIE**

- În oricare grup $(G, \cdot)$ avem: $\langle x \rangle = \left\langle x^{-1} \right\rangle$.

## 7.2. Ordinul unui element într-un grup

Fie $(G, \cdot)$ un grup și $a \in G$.

❖ **DEFINIȚII**

- Se numește **ordin al elementului a** și se notează $\text{ord}(a)$ ordinul subgrupului $\langle a \rangle$.
- Un element $a \in G$ se numește de **ordin finit** dacă $\text{ord}(a) \in \mathbb{N}^*$ și de **ordin infinit** în caz contrar.

☞ ***Exemple***

- În orice grup $(G, \cdot)$, $\text{ord}(e) = 1$. Elementul neutru al grupului este singurul element de ordinul 1.
- În grupul Klein $(K, \cdot)$, oricare element $x \neq e$ are ordinul 2.
- În grupul $(\mathbb{Z}_4, +)$ avem: $\text{ord}(\hat{2}) = 2$, $\text{ord}(\hat{3}) = 4$, $\text{ord}(\hat{1}) = 4$.

➲ **OBSERVAȚIE**

- Dacă $a \in G$ se observă ușor că $\text{ord}(a)$ este cel mai mic număr natural nenul n pentru care $a^n = e$.
  Într-adevăr, dacă $\text{ord}(a) = p < n$, atunci mulțimea $H = \{e, a, a^2, \ldots, a^{p-1}\}$ este subgrup al lui G și este chiar grupul $\langle a \rangle$. Se obține astfel o contradicție, deoarece $\text{ord}(\langle a \rangle) = n \neq p$.

**▣ TEOREMA 19**

Fie $(G, \cdot)$ un grup, $a \in G \setminus \{e\}$ și $n = \text{ord}(a)$.

Dacă $p \in \mathbb{Z}$, astfel încât $a^p = e$, atunci $n \mid p$.

<u>*Demonstrație*</u>

Fie $a^p = e$. Din teorema împărțirii cu rest rezultă că există $q \in \mathbb{Z}$ și $r \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$, astfel încât $p = nq + r$. Dacă $r \neq 0$ rezultă $e = a^p = a^{nq+r} = a^{nq} \cdot a^r = (a^n)^q \cdot a^r = e \cdot a^r = a^r$, în contradicție cu definiția ordinului unui element.

Așadar, $r = 0$ și $p = nq$. Rezultă că $n \mid p$. ■

***Problemă rezolvată***

☒ Fie $(G, \cdot)$ un grup și $a, b \in G$. Să se arate că $\text{ord}(ab) = \text{ord}(ba)$.

<u>*Soluție*</u>

Fie $n = \text{ord}(ab)$. Rezultă că $(ab)^n = e$.

Avem $ab = (ab)^{n+1} = \underbrace{(ab)\cdot(ab)\cdot\ldots\cdot(ab)}_{n+1} = a \cdot \underbrace{(ba)\cdot(ba)\cdot\ldots(ba)}_{n} \cdot b$.

Folosind legea de simplificare la stânga cu a și la dreapta cu b se obține $e = (ba)^n$, (1).

Să arătăm că n este ordinul lui $(ba)$. Fie $\text{ord}(ba) = p$. Din teorema 19 rezultă că $p \mid n$. Din relația $(ba)^p = e$, se obține succesiv:

$$ba = (ba)^{p+1} = \underbrace{(ba)\cdot(ba)\cdot\ldots\cdot(ba)}_{p+1} = b \cdot \underbrace{(ab)\cdot(ab)\cdot\ldots\cdot(ab)}_{p} \cdot a, \quad (2).$$

Folosind legea de simplificare, din relația (2) se obține $e = (ab)^p$.
Deoarece $n = ord(ab)$, din teorema 19 se obține $n \mid p$.
Așadar, $n = p$ și elementele ab și ba au același ordin.

## 7.3. Teoreme remarcabile în teoria grupurilor finite

Fie $(G, \cdot)$ un grup și H un subgrup al lui G. Pentru $x \in G$ notăm: $xH = \{xh \mid h \in H\}$.

**▣ TEOREMA 20**

Fie $(G, \cdot)$ un grup finit, H subgrup al lui G și $x, y \in G$. Atunci:
**a)** mulțimile H și xH au același număr de elemente;
**b)** $xH = yH$ sau $xH \cap yH = \varnothing$.

*Demonstrație*

**a)** Arătăm că H și xH au același număr de elemente. Definim funcția $f : H \to xH, f(h) = xh$ și arătăm că f este bijectivă.

• *Injectivitatea.* Fie $h_1, h_2 \in H$ cu proprietatea că $f(h_1) = f(h_2)$. Rezultă că $xh_1 = xh_2$ și folosind regula de simplificare la stânga se obține că $h_1 = h_2$. Așadar f este injectivă.

• *Surjectivitatea.* Fie $y \in xH$. Rezultă că există $h \in H$ astfel încât $y = xh$. Atunci avem că $f(h) = xh = y$, deci f este surjectivă.

Așadar f este bijectivă și astfel $card(H) = card(xH)$.

**b)** Deosebim cazurile:

• $y \in xH$. Vom arăta că $xH = yH$.

Fie $z \in yH$. Rezultă că există $h_1, h \in H$ astfel încât $y = xh$ și $z = yh_1$. Se obține că: $z = yh_1 = x(hh_1) \in xH$ deci $yH \subset xH$.

Reciproc, fie $z \in xH$, deci există $h_1 \in H$ cu $z = xh_1$. Rezultă că $z = xh_1 = (yh^{-1})h_1 = y(h^{-1}h_1) \in yH$ deci $xH \subset yH$. Așadar $xH = yH$.

• $y \notin xH$. Vom arăta că $xH \cap yH = \varnothing$. Presupunem că există $z \in xH \cap yH$. Atunci $z \in xH$ și $z \in yH$, deci există $h_1, h_2 \in H$ astfel încât $z = xh_1, z = yh_2$. Așadar, $yh_2 = xh_1$ sau $y = x(h_1 \cdot h_2^{-1}) \in xH$ în contradicție cu ipoteza.

În concluzie $xH \cap yH = \varnothing$. ■

➲ **OBSERVAȚIE**

- Rezultatul anterior ne arată că dacă H este un subgrup al grupului $(G, \cdot)$, mulțimea G poate fi partiționată în submulțimi cu același număr de elemente de forma xH, cu $x \in G$. Așadar există elementele $x_1, x_2, \ldots, x_p \in G$ astfel încât $G = (x_1H) \cup (x_2H) \cup \ldots \cup (x_pH)$, unde mulțimile $x_1H, x_2H, \ldots, x_pH$ sunt disjuncte două câte două.

**▣ TEOREMA 21 (Lagrange J.L.)**

Fie $(G, \cdot)$ un grup finit și $n = \text{ord}(G)$.

**a)** Dacă H este un subgrup al lui G, atunci $\text{ord}(H)$ divide $\text{ord}(G)$.

**b)** Dacă $a \in G$, atunci $\text{ord}(a)$ divide $\text{ord}(G)$.



*Joseph-Louis LAGRANGE*
*(1736-1813)*
*matematician francez*

*A adus contribuții importante în analiza matematică, algebră, teoria numerelor și mecanică.*

*Demonstrație*

**a)** Grupul G, având ordinul n, poate fi scris $G = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

Considerăm mulțimea $\mathcal{M} = \{x_iH \mid i = \overline{1, n}\}$ și fie $r = \text{card}(M)$. Se observă ușor că G este reuniunea mulțimilor $x_iH$, care sunt elemente ale lui $\mathcal{M}$. Cum $\text{card}(H) = \text{card}(x_iH)$, $x = \overline{1, n}$, se obține egalitatea $\text{card}(G) = r \cdot \text{card}(H)$, adică $n = r \cdot \text{ord}(H)$.

Așadar $\text{ord}(H)$ divide $n = \text{ord}(G)$.

**b)** Dacă $a \in G$, iar $k = \text{ord}(a)$, considerăm $\langle a \rangle = \{e, a, a^2, \ldots, a^{k-1}\}$ și vom avea că $\text{ord}(\langle a \rangle)$ divide $\text{ord}(G)$. Dar cum $\text{ord}(\langle a \rangle) = \text{ord}(a)$, se obține că $\text{ord}(a)$ divide $\text{ord}(G)$. ■

## *Probleme rezolvate*

☒ **1.** Fie $(G, \cdot)$ un grup finit cu $\text{ord}(G) = p$. Să se arate că dacă p este număr prim, atunci G nu are subgrupuri proprii.

*Soluție*

Fie $H \subset G$ un subgrup al lui G. Din teorema lui Lagrange rezultă că $\text{ord}(H)$ divide numărul p, deci $\text{ord}(H) \in \{1, p\}$. Așadar, $H = \{e\}$ sau H = G, deci H este subgrup impropriu.

## ➲ OBSERVAȚIE

- Grupurile aditive $(\mathbb{Z}_2, +), (\mathbb{Z}_3, +), \ldots, (\mathbb{Z}_p, +), \cdots$ cu p număr prim, nu au subgrupuri proprii.

☒ **2.** Să se arate că toate grupurile care au ordinul un număr prim p sunt izomorfe.

*Soluție*

Fie $(G, \cdot)$ un grup de ordin p. Deoarece p este număr prim, grupul G are doar subgrupuri improprii.

Dacă $x \in G \setminus \{e\}$, atunci $ord(\langle x \rangle) = p$, deci $G = \langle x \rangle$. Așadar, grupul G este grup generat de un singur element $x \in G$, (**grup ciclic**).

Fie $G = \{e, x, x^2, \ldots, x^{p-1}\}$. Atunci funcția $f : G \to \mathbb{Z}_p, f(x^k) = \hat{k}$, este un izomorfism de grupuri, fiind funcție bijectivă, iar $f(x^k \cdot x^{k_1}) = $ $= f(x^{k+k_1}) = \widehat{k + k_1}$ și $f(x^k) + f(x^{k_1}) = \hat{k} + \widehat{k_1} = \widehat{k + k_1}$.

Rezultă că grupul $(G, \cdot)$ este izomorf cu grupul $(\mathbb{Z}_p, +)$. Așadar, toate grupurile cu p elemente sunt izomorfe cu $\mathbb{Z}_p$, deci izomorfe între ele.

☒ **3.** Fie $(G, \cdot)$ un grup de ordinul 4. Să se arate că $G \simeq \mathbb{Z}_4$ sau $G \simeq K_4$, unde $K_4$ este grup de tip Klein cu patru elemente.

*Soluție*

Fie $a \in G \setminus \{e\}$. Deosebim situațiile:

• $ord(a) = 4$. Atunci $G = \langle a \rangle = \{e, a, a^2, a^3\}$ și rezultă că $f : G \to \mathbb{Z}_4$, $f(a^k) = \hat{k}$ este izomorfism de grupuri, (verificați). Așadar $(G, \cdot) \simeq (\mathbb{Z}_4, +)$.

• $ord(a) < 4$. Din teorema lui Lagrange rezultă că $ord(a) \in \mathcal{D}_4 = \{1, 2, 4\}$. Cum $a \neq e$ și $ord(a) \neq 4$ se obține că $ord(a) = 2$. Așadar orice element $a \in G \setminus \{e\}$ are ordinul 2, deci G este grup de tip Klein.

## ➲ OBSERVAȚIE

- Din problemele anterioare rezultă că grupurile cu 2, 3, 4, 5 elemente sunt comutative, deoarece ele sunt izomorfe cu $\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_5$ sau $K_4$ care sunt comutative.

☒ **4.** Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că dacă $a \in \mathbb{Z}$, astfel încât $(a, n) = 1$ atunci $a^{\varphi(n)} - 1 \equiv 0 (\bmod n)$. (**Teorema lui Euler**)

*Soluție*

Considerăm monoidul $(\mathbb{Z}_n, \cdot)$ și fie $(\mathcal{U}(\mathbb{Z}_n), \cdot)$ grupul elementelor inversabile ale acestui monoid.

Deoarece $\text{ord}(\mathcal{U}(\mathbb{Z}_n)) = \varphi(n)$, pentru $(a, n) = 1$, vom avea că $a^{\varphi(n)} = \hat{1}$, ceea ce este echivalent cu $a^{\varphi(n)} \equiv 1 (\bmod n)$.

➲ **OBSERVAȚIE**

- Dacă $p \in \mathbb{N}$ este număr prim, atunci pentru $a \in \mathbb{Z}$, $(a, p) = 1$ se obține că $\varphi(p) = p - 1$ și $a^{p-1} \equiv 1 (\bmod p)$. (**Teorema lui Fermat**)

## EXERCIȚII ȘI PROBLEME

### EXERSARE

**E1.** **Să se determine subgrupul generat de elementul x în grupul specificat:**

**a)** $x = 2$ **în** $(\mathbb{Z}, +)$;

**b)** $x \in \{-1, i\}$ **în** $(\mathbb{C}^*, \cdot)$;

**c)** $x \in \{\hat{2}, \hat{4}\}$ **în** $(\mathbb{Z}_8, +)$;

**d)** $x \in \{\hat{3}, \hat{6}\}$ **în** $(\mathbb{Z}_{18}, +)$;

**e)** $x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ **în** $(S_3, \cdot)$.

**E2.** **Să se determine elementele de ordinul m în grupul specificat:**

**a)** $(\mathbb{C}^*, \cdot)$, $m = 2$; **b)** $(\mathbb{Z}_4, +)$, $m = 2$;

**c)** $(\mathbb{Z}_{24}, +)$, $m = 3$; **d)** $(\mathbb{C}^*, \cdot)$, $m = 4$.

**E3.** **Să se determine ordinul elementelor:**

**a)** $\hat{2}, \hat{5}, \hat{6}$ **în grupul** $(\mathbb{Z}_{12}, +)$;

**b)** $\hat{1}, \hat{2}, \hat{5}, \hat{6}$ **în grupul** $(\mathcal{U}(\mathbb{Z}_{11}), \cdot)$.

**E4.** **Fie** $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ **și** $\mathcal{M} = \{A^n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$.

**a) Să se arate că** $(\mathcal{M}, \cdot)$ **este grup comutativ.**

**b) Să se determine ordinul fiecărui element** $A \in \mathcal{M}$.

**E5.** **Fie** $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \middle| \, a, c \in \mathbb{R}^* \text{ și } b \in \mathbb{R} \right\}$.

**a) Să se arate că** $(G, \cdot)$ **este grup.**

**b) Să se determine elementele lui G de ordinul 2.**

**c) Să se arate că matricele** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ **și** $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ **au în grupul G ordinul 2, dar AB are ordinul infinit.**

**E6.** **Să se determine ordinul permutării** $\sigma \in S_n$, **în cazurile:**

**a)** $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

**b)** $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

c) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

d) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$;

e) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

**E7.** Fie $G = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^n \middle| \, n \in \mathbb{Z} \right\}$.

a) Să se arate că $(G, \cdot)$ este un grup finit.
b) Să se determine ordinul fiecărui element al acestui grup.

**E8.** Fie $G = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \, \det(A) = 1 \right\}$.

a) Să se arate că $(G, \cdot)$ este grup.

b) Dacă $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, să se arate că $\text{ord}(A) = 4$, $\text{ord}(B) = 6$, iar AB are ordinul infinit.

## APROFUNDARE

**A1.** Fie $(G, \cdot)$ un grup finit necomutativ de ordin n.
a) Să se arate că nu există $x \in G$, astfel încât $\text{ord}(x) = n$.
b) Să se arate că pentru oricare $x \in G$, $x^n = e$.

**A2.** Fie $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \right\}$.

a) Să se arate că $(G, \cdot)$ este grup. Să se alcătuiască tabla grupului.
b) Să se determine ordinul fiecărui element din G.

**A3.** Fie $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \right\} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

a) Să se arate că $(G, \cdot)$ este grup necomutativ și să se alcătuiască tabla grupului.
b) Să se determine elementele de ordinul 2 din grupul G.

**A4.** Fie $(G, \cdot)$ un grup și $x, y \in G$ cu proprietatea că $\text{ord}(x) = 3$, $y^4 = e$, $xy = y^3x$. Să se arate că dacă $y \in G \setminus \{e\}$, atunci $\text{ord}(y) = 2$ și $yx = xy$.

**A5.** Fie $(G, \cdot)$ un grup și $x, y \in G \setminus \{e\}$ astfel încât $\text{ord}(x) = 2$, $y^6 = e$ și $xy = y^4x$. Să se arate că $\text{ord}(y) = 3$ și $xy = yx$.

**A6.** Fie $(G, \cdot)$ un grup finit și $a, b \in G$ astfel încât $ab = ba$, iar $\text{ord}(a) = m$, $\text{ord}(b) = n$. Să se arate că dacă $(m, n) = 1$, atunci $\text{ord}(ab) = m \cdot n$.

## DEZVOLTARE

**D1.** Să se arate că:
a) $(\mathbb{Z}, +) \not\simeq (\mathbb{Z}[i], +)$;
b) $(\mathbb{Z}[i], +) \not\simeq (\mathbb{Q}[i], +)$.

**D2.** Fie $(G_1, \cdot)$ și $(G_2, \cdot)$ două grupuri abeliene și $\text{Hom}(G_1, G_2) = \{f : G_1 \to G_2 \mid f \text{ morfism de grupuri}\}$. Să se arate că $(\text{Hom}(G_1, G_2), +)$ este un grup abelian.

**D3.** Fie $(G, \cdot)$ un grup abelian. Să se arate că grupurile $(\mathbb{Z}, +)$ și $(\text{Hom}(\mathbb{Z}, G), +)$ sunt izomorfe.

**D4.** Să se determine: a) $\text{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$;
b) $\text{Hom}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q})$; c) $\text{Hom}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z})$.

# TESTE DE EVALUARE

## Testul 1

**❍1.** **Fie $G = \mathbb{C} \setminus \{1\}$ și legea de compoziție $G \times G \to G,\ (x, y) \to x \circ y = x + y - xy$.**

**a) Să se determine:**

| **Grupa 1** | **Grupa 2** |
|---|---|
| $x = (1 - i) \circ (1 + i);$ | $x = i \circ i \circ i \circ i.$ |

**b) Să se rezolve în G ecuațiile:**

| | |
|---|---|
| $x \circ i \circ x = i \circ x \circ i;$ | $x \circ i = i \circ (i \circ x).$ |

**d) Să se rezolve în G sistemul:**

| | |
|---|---|
| $\begin{cases} x \circ i = i \circ y \\ (x+1) \circ y = 1 \end{cases};$ | $\begin{cases} 2 \circ x = y \circ 2 \\ (3x) \circ y = 1 \end{cases}.$ |

***(6 puncte)***

## Testul 2

**❍1.** **Fie $G = \left\{ A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}) \,\middle|\, A = \begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix} \right\}$ și $H = \left\{ A \in G \,\middle|\, A = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \right\}$.**

**Să se arate că:**

**a) $(G, \cdot)$ este monoid comutativ;**

**b) $(H, +)$ este subgrup al grupului $(G, +)$;**

**c) funcția $f : H \to \mathbb{Q},\ f\left(\begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix}\right) = (-1)^n$, este morfism între grupurile $(H, +)$ și $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$.**

***(5 puncte)***

**❍2.** **Se consideră funcția $f : \mathcal{R}_{15} \to \mathcal{R}_3 \times \mathcal{R}_5$ dată prin $f(a) = (a \bmod 3;\ a \bmod 5)$.**

**a) Să se arate că f este funcție bijectivă.**

**b) Dacă $G = \left\{ f^{-1}((0, y)) \,\middle|\, y \in \mathcal{R}_5 \right\}$, să se arate că G este subgrup al grupului $(\mathcal{R}_{15}, \oplus)$.**

***(4 puncte)***

## Testul 3

**❍1.** **Pe mulțimea $G = (1, 2) \cup (2, +\infty)$ se definește legea de compoziție $G \times G \to G,\ (x, y) \to x \circ y = (x-1)^{\ln(y-1)} + 1$. Să se stabilească valoarea de adevăr a propozițiilor:**

**a) G nu este parte stabilă în raport cu legea dată.**

**b) Legea de compoziție „ $\circ$ “ este asociativă.**

**c) Legea de compoziție „ $\circ$ “ admite elementul neutru numărul e + 2.**
**d) $(G, \circ)$ este grup abelian.**

*(6 puncte)*

**○2.** **Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se consideră legile de compoziție $x \circ y = ax + by - 1$ și $x \perp y = 2xy - 2x - 2y + c$.**

**a) Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ pentru care $(\mathbb{R}, \circ)$ este grup abelian.**

**b) Să se determine $a, b, c \in \mathbb{R}$ pentru care $(\mathbb{R}, \circ)$ este grup abelian și $(x \circ y) \perp z = (x \perp z) \circ (y \perp z)$, $\forall\ x, y, z \in \mathbb{R}$.**

**c) În condițiile găsite la b), să se determine elementele simetrizabile în monoidul $(\mathbb{R}, \perp)$.**

*(3 puncte)*

## Testul 4

**○1.** **Fie $G = (0, 1)$ și legea de compoziție $G \times G \to G$, $(x, y) \to x \circ y \overset{def}{=} \dfrac{axy}{bxy - cx - dy + 1}$.**

**a) Să se determine $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, astfel încât $(G, \circ)$ să fie grup în care simetricul lui $\frac{1}{3}$ este $\frac{2}{3}$ și simetricul lui $\frac{1}{4}$ să fie $\frac{3}{4}$.**

**b) Să se determine $m, n \in \mathbb{R}$, astfel încât funcția $f : (0, +\infty) \to (0, 1)$, $f(x) = \dfrac{x + n}{mx + 1}$, să fie izomorfism între grupurile $((0, +\infty), \cdot)$ și $(G, \circ)$, pentru valorile a, b, c, d găsite anterior.**

*(5 puncte)*

**○2.** **Se consideră mulțimea $A = \left\{(1 + i)^k \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \subset \mathbb{C}$.**

**a) Să se arate că $(A, \cdot)$ este subgrup al grupului $(\mathbb{C}^*, \cdot)$.**

**b) Să se arate că $(A, \cdot) \simeq (\mathbb{Z}, +)$.**

*(4 puncte)*

## Testul 5

**○1.** **Se consideră mulțimea $E = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ și funcția:**

$$f_a : E \to E,\ f_a(x, y) = \left(x + ay + \frac{a^2}{2},\ y + a\right).$$

**a) Să se arate că $f_a \circ f_b = f_{a+b}$, $\forall\ a, b \in \mathbb{R}$.**

**b) Dacă $G = \{f_a \mid a \in \mathbb{R}\}$, să se arate că $(G, \circ)$ este grup.**

**c) Arătați că $(G, \circ) \simeq (\mathbb{R}, +)$.**

*(5 puncte)*

❍2. **Se consideră permutările** $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$,

$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

**a) Să se determine ordinul acestor permutări.**

**b) Să se arate că $S_6$ are un singur subgrup de ordinul 3.**

**c) Să se rezolve ecuația:** $\sigma^{2001} \circ x \circ \beta^{2002} = \gamma^{2003}$.

***(4 puncte)***

## Testul 6

❍1. **Se consideră mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ și submulțimea:**

$$H \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{C}),\ H = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & a \end{pmatrix} \middle|\ a, b \in \mathbb{C} \right\}.$$

**a) Să se demonstreze că dacă $A, B \in H$, atunci $A + B \in H$.**

**b) Să se verifice că $O_2 \in H$.**

**c) Să se arate că dacă $A \in H$ atunci $-A \in H$.**

**d) Să se arate că submulțimea H împreună cu operația de adunare indusă, formează o structură de grup comutativ.**

**e) Să se demonstreze că dacă $A \in H$ și are determinantul zero, atunci $A = O_2$.**

***(4 puncte)***
***(Bacalaureat, iunie, 2000)***

❍2. **Pe mulțimea $\mathbb{Z}$ se consideră operațiile algebrice $x \circ y = ax + cy + b$ și $x \perp y = cx + cy + a + b$.**

**a) Să se determine $a, b, c \in \mathbb{Z}$, pentru care perechile $(\mathbb{Z}, \circ)$ și $(\mathbb{Z}, \perp)$ sunt grupuri.**

**b) Să se determine $m, n \in \mathbb{Z}$ pentru care funcția $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = mx + n$ este izomorfism între grupurile $(\mathbb{Z}, \circ)$ și $(\mathbb{Z}, \perp)$.**

***(3 puncte)***

❍3. **Se consideră mulțimea F a funcțiilor $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, derivabile cu proprietatea că $f'(x) = f(x)$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$.**

**a) Să se arate că adunarea funcțiilor determină pe mulțimea F o structură de grup comutativ.**

**b) Să se arate că grupul $(\mathcal{F}, +)$ este izomorf cu grupul aditiv $(\mathbb{R}, +)$.**

***(2 puncte)***

# Testul 7

❍1. **Pe mulțimea numerelor reale $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție: $x \perp y = 3xy - 6x - 6y + 14$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.**

**a) Să se arate că legea este asociativă și comutativă.**

**b) Să se determine elementul neutru.**

**c) Să se demonstreze că pentru oricare $n \in \mathbb{N}^*$ are loc identitatea:**

$$\underbrace{x \perp x \perp \ldots \perp x}_{x \text{ de } n \text{ ori}} = 3^{n-1} \cdot (x-2)^n + 2,\ x \in \mathbb{R}.$$

*(4 puncte)*
*(Bacalaureat, iunie, 2000)*

❍2. **Pe mulțimea $G = (1, +\infty)$ se definește legea de compoziție $x * y = x^{\log_2 y}$, $\forall\ x, y \in G$.**

**a) Să se arate că $(G, *)$ este grup abelian.**

**b) Să se rezolve sistemul:** $\begin{cases} x * (2y) = 8 \\ (2x) * y = 16 \end{cases}$.

**c) Să se arate că între grupurile $((0, +\infty), \cdot)$ și $(G, *)$ există un izomorfism de forma $f(x) = a^x$.**

*(3 puncte)*
*(Univ. Craiova, septembrie, 2000)*

❍3. **Fie mulțimea** $M = \left\{ \begin{pmatrix} x & ax+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle|\ x \in \mathbb{R}^* \right\}$.

**a) Să se determine $a, b \in \mathbb{R}^*$, astfel încât $(M, \cdot)$ să fie grup.**

**b) Să se arate că toate grupurile obținute la punctul a) sunt izomorfe.**

*(2 puncte)*

# Testul 8

❍1. **Pe mulțimea numerelor întregi definim legea de compoziție: $x \circ y = 6xy - 2x - 2y + 1$. Elementul neutru al acestei legi este:**

**a)** $e = 2$, **b)** $e = 1$, **c)** $e = -1$, **d)** $e = \frac{1}{2}$, **e) nu există.**

❍2. **Pe mulțimea numerelor complexe definim legea de compoziție „$\circ$" dată prin relația: $x \circ y = x + y - xy$. Elementul simetric al numărului $i \in \mathbb{C}$ este:**

**a)** $s = i$, **b)** $s = 1 - i$, **c)** $s = 1$, **d)** $s = \frac{1+i}{2}$, **e)** $s = \frac{1-i}{2}$.

❍3. **Pe mulțimea numerelor reale se definesc operațiile $x * y = x + y - 2$ și $x \circ y = x + y - 5$, $\forall\ x, y \in \mathbb{R}$. Funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + 1$ este izomorfism între grupurile $(\mathbb{R}, *)$ și $(\mathbb{R}, \circ)$ pentru:**

**a)** $a = 0$, **b)** $a = 1$, **c)** $a = 2$, **d)** $a = 3$, **e)** $a = 4$.

# II. INELE ȘI CORPURI

## 1 Definiții și exemple

### ❖ DEFINIȚII

Fie A o mulțime nevidă și legile de compoziție:

$A \times A \to A, (x, y) \to x \perp y;$

$A \times A \to A, (x, y) \to x \top y.$

• Tripletul $(A, \perp, \top)$ se numește **inel** dacă sunt verificate axiomele:

*(A1) Axioma grupului:*

Perechea $(A, \perp)$ este grup comutativ.

*(A2) Axioma monoidului:*

Perechea $(A, \top)$ este monoid.

*(A3) Axiomele distributivității:*

$x \top (y \perp z) = (x \top y) \perp (x \top z), \forall\ x, y, z \in A;$

$(x \perp y) \top z = (x \top z) \perp (y \top z), \forall\ x, y, z \in A.$

• Inelul $(A, \perp, \top)$ se numește **inel comutativ** dacă legea de compoziție „$\top$" este comutativă.

• Grupul $(A, \perp)$ se numește **grupul subiacent** al inelului $(A, \perp, \top)$.

Pentru simplificarea scrierii, atunci când este posibil, pentru cele două legi de compoziție „$\perp$" și „$\top$" se folosesc notațiile „+" și „$\cdot$". Astfel, tripletul $(A, \perp, \top)$ capătă scrierea $(A, +, \cdot)$.

• Prima operație a inelului se numește **adunarea** inelului, iar a doua operație se numește **înmulțirea inelului.**

• Elementul neutru al adunării inelului se numește **element nul** sau **zero** și se notează $0_A$ sau, mai simplu, 0.

• Simetricul unui element $x \in A$ în grupul subiacent $(A, +)$ se numește **opusul** lui x și se notează „–x".

• Dacă $a, b \in A$, elementul $a + (-b)$ se notează $a - b$ și se numește **diferența** elementelor a și b.

• Elementul neutru al monoidului $(A, \cdot)$ se numește **elementul unitate** al inelului și se notează $1_A$ sau, mai simplu, 1.

• Cu notațiile „+" și „$\cdot$" pentru operațiile inelului, axiomele distributivității se scriu:

$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z, \forall\ x, y, z \in A;$

$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z, \forall\ x, y, z \in A.$

• Acestea reprezintă reguli de înmulțire a unui element cu o sumă, respectiv a înmulțirii unei sume cu un element al inelului.

• Elementele simetrizabile ale monoidului $(A, \cdot)$ se numesc **elemente inversabile** ale inelului A sau **unități** ale inelului A. Mulțimea unităților inelului A se notează $\mathcal{U}(A)$. Se știe că perechea $(\mathcal{U}(A), \cdot)$ este un grup, numit **grupul unităților** inelului A. Dacă x este inversabil, inversul său se notează $x^{-1}$.

☞ ***Exemple de inele***

- Din proprietățile adunării și înmulțirii numerelor rezultă că tripletele: $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ sunt inele comutative numite **inele numerice**.
- Având în vedere proprietățile adunării și înmulțirii matricelor, rezultă că tripletele: $(\mathcal{M}_n(\mathbb{Z}), +, \cdot)$, $(\mathcal{M}_n(\mathbb{Q}), +, \cdot)$, $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$ și $(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}), +, \cdot)$, $n \geq 2$, sunt inele necomutative. Elementul nul în aceste inele este matricea nulă $O_n$, iar elementul unitate este matricea unitate $I_n$.

❑ **TEMĂ**

**1. *Activitate individuală***
**Să se determine grupul unităților inelelor numerice $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$.**

**2. *Activitate pe grupe***
**Pe mulțimea $\mathbb{Z}$ se consideră legile de compoziție:**

| **Grupa 1** | **Grupa 2** | **Grupa 3** |
|---|---|---|
| $x \perp y = x + y + 1$, | $x \perp y = x + y - 1$, | $x \perp y = x + y + 3$, |
| $x \top y = xy + x + y$, | $x \top y = x + y - xy$, | $x \top y = xy + 3x + 3y + 6$. |

**a) Să se studieze dacă $(\mathbb{Z}, \perp, \top)$ este inel comutativ.**

**b) Să se determine $\mathcal{U}(\mathbb{Z})$.**

## 1.1. Inelul claselor de resturi modulo n

Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și $\mathbb{Z}_n = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \ldots, \widehat{n-1}\}$ mulțimea claselor de resturi modulo n. Se știe că $(\mathbb{Z}_n, +)$ este grup comutativ, iar $(\mathbb{Z}_n, \cdot)$ este monoid comutativ.

Se verifică totodată și axiomele distributivității:

$$\hat{x} \cdot (\hat{y} + \hat{z}) = \hat{x} \cdot \widehat{y \oplus z} = \widehat{x \odot (y \oplus z)} = \widehat{(x \odot y) \oplus (x \odot z)} = \widehat{x \odot y} + \widehat{x \odot z} =$$

$$= \hat{x} \cdot \hat{y} + \hat{x} \cdot \hat{z}, \ \forall\ \hat{x}, \hat{y}, \hat{z} \in \mathbb{Z}_n.$$

Analog, $(\hat{x} + \hat{y}) \cdot \hat{z} = \hat{x} \cdot \hat{z} + \hat{y} \cdot \hat{z}, \ \forall\ \hat{x}, \hat{y}, \hat{z} \in \mathbb{Z}_n$.

Așadar, înmulțirea claselor de resturi modulo n este distributivă în raport cu adunarea claselor de resturi modulo n.

În concluzie, tripletul $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ este un inel comutativ, numit **inelul claselor de resturi modulo n**.

În monoidul $(\mathbb{Z}_n, \cdot)$ un element $\hat{p} \in \mathbb{Z}_n$ este inversabil dacă și numai dacă $(p, n) = 1$. Se obține că $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_n) = \left\{\hat{p} \in \mathbb{Z}_n \;\middle|\; (p, n) = 1\right\}$.

În particular, dacă n este număr prim, rezultă că $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_n) = \mathbb{Z}_n \setminus \{\hat{0}\}$.

❑ TEMĂ

***Activitate pe grupe de elevi***

**1. Să se determine elementele inversabile în inelele:**

| Grupa 1 | Grupa 2 | Grupa 3 |
|---|---|---|
| $\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_6, \mathbb{Z}_{16}$ | $\mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_8, \mathbb{Z}_{18}$ | $\mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_{10}, \mathbb{Z}_{24}$ |

**2. Să se determine elementele x din inelul $(M, +, \cdot)$ cu proprietatea că $x \cdot x = \hat{0}$, dacă:**

| Grupa 1 | Grupa 2 | Grupa 3 |
|---|---|---|
| $M = \mathbb{Z}_{16}$ | $M = \mathbb{Z}_9$ | $M = \mathbb{Z}_{25}$ |

**și să se arate că $\left\{\hat{1} - x \;\middle|\; x \in M,\ x \cdot x = \hat{0}\right\} \subset \mathcal{U}(M)$.**

## 1.2. Inele de matrice pătratice

Fie $(K, +, \cdot)$ un inel comutativ. Pentru $n \in \mathbb{N}^*$ se notează cu $\mathcal{M}_n(K)$ mulțimea matricelor pătratice de ordinul n cu elemente din inelul K.

Pe mulțimea $\mathcal{M}_n(K)$ se definesc operațiile de **adunare** și de **înmulțire** a matricelor, astfel:

Dacă $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$, $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, atunci:

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij});$$

$$A \cdot B = (c_{ij}), \text{ unde } c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}.$$

De asemenea, pentru matricea $A \in \mathcal{M}_n(K)$ se definește determinantul acesteia: $\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)}$ care este un element al inelului K. Proprietățile determinanților sunt aceleași ca în cazul determinanților cu coeficienți în inele numerice.

Modul în care s-a definit adunarea și înmulțirea matricelor pe mulțimea $\mathcal{M}_n(K)$ face ca proprietățile acestora să fie asemănătoare cu cele definite pe mulțimea $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Astfel, are loc următorul rezultat:

**▣ TEOREMA 1**

Fie $(K, +, \cdot)$ un inel comutativ.

Tripletul $(\mathscr{M}_n(K), +, \cdot)$ este un inel, numit **inelul matricelor pătratice de ordin n peste inelul K**.

<u>*Demonstrație*</u>

**a)** Se verifică axiomele inelului, având în vedere proprietățile operațiilor în inelul K. Elementul neutru este matricea nulă $O_n$ cu toate elementele egale cu $0_k$ – elementul nul din inelul K, iar elementul unitate este matricea $I_n$ cu toate elementele de pe diagonala principală egale cu $1_k$ și în rest egale cu $0_k$.

**b)** Inelul este necomutativ, deoarece, luând matricele:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \text{ și } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \text{ se obține:}$$

$A \cdot B = B$ și $B \cdot A = O_n$, deci $A \cdot B \neq B \cdot A$. ■

Următorul rezultat precizează care sunt elementele inversabile în inelul $\mathscr{M}_n(K)$.

**▣ TEOREMA 2**

Fie $(K, +, \cdot)$ un inel comutativ, $(\mathscr{M}_n(K), +, \cdot)$ inelul matricelor pătratice de ordinul n peste inelul K și $A \in \mathscr{M}_n(K)$ o matrice.

Matricea A este inversabilă în inelul $\mathscr{M}_n(K)$, dacă și numai dacă $d = \det(A)$ este element inversabil în inelul K.

<u>*Demonstrație*</u>

Fie $A \in \mathscr{M}_n(K)$ o matrice inversabilă. Atunci există $B \in \mathscr{M}_n(K)$, astfel încât $A \cdot B = B \cdot A = I_n$. Folosind proprietățile determinanților se obține că $\det(A \cdot B) = \det(I_n) = 1$ și $\det(A) \cdot \det(B) = 1$, deci $\det(A) \in \mathscr{U}(K)$.

Reciproc, fie $\det(A) \in \mathscr{U}(K)$. Ca și în cazul inelelor numerice, matricea $A^{-1}$, inversa matricei A, se construiește după același algoritm:

- construcția matricei transpuse ${}^tA$;
- construcția matricei adjuncte $A^*$;
- matricea inversă: $\mathbf{A^{-1} = (\det(A))^{-1} \cdot A^*}$.

Printr-un procedeu analog aceluia din inelele numerice, se arată că $A^{-1}$ are proprietatea: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$. ■

Grupul multiplicativ $\mathcal{U}\left(\mathcal{M}_n(K)\right)$ al matricelor inversabile peste inelul K se notează $GL_n(K)$ și se numește **grupul liniar de ordinul n** peste inelul K.

Avem: $GL_n(K) = \left\{A \in \mathcal{M}_n(K) \mid \det(A) \in \mathcal{U}(K)\right\}$.

## *Probleme rezolvate*

☒ **1.** Să se verifice dacă matricea $A = \begin{pmatrix} \hat{3} & \hat{1} \\ \hat{2} & \hat{3} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_5)$ este inversabilă, și în caz afirmativ, să se afle $A^{-1}$.

<u>*Soluție*</u>

Se știe că $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_5) = \{\hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}\}$.

Avem: $\det(A) = \hat{3} \cdot \hat{3} - \hat{2} \cdot \hat{1} = \hat{4} - \hat{2} = \hat{2} \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}_5)$, deci A este matrice inversabilă în $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_5)$.

Conform algoritmului de determinare a matricei inverse, se obține:

$${}^tA = \begin{pmatrix} \hat{3} & \hat{2} \\ \hat{1} & \hat{3} \end{pmatrix} \text{ și } A^* = \begin{pmatrix} \hat{3} & -\hat{1} \\ -\hat{2} & \hat{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{3} & \hat{4} \\ \hat{3} & \hat{3} \end{pmatrix} \text{ și}$$

$$A^{-1} = \hat{2}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \hat{3} & \hat{4} \\ \hat{3} & \hat{3} \end{pmatrix} = \hat{3} \cdot \begin{pmatrix} \hat{3} & \hat{4} \\ \hat{3} & \hat{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{4} & \hat{2} \\ \hat{4} & \hat{4} \end{pmatrix}.$$

☒ **2.** Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{1} & \hat{a} \\ \hat{2} & \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} & \hat{1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_6)$. Să se determine $\hat{a}$ pentru care matricea A este inversabilă.

<u>*Soluție*</u>

Avem $\det(A) = \hat{2} \cdot \hat{a} - \hat{1}$.

Matricea A este inversabilă dacă $\hat{2} \cdot \hat{a} - \hat{1} \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}_6) = \{\hat{1}, \hat{5}\}$.

Rezultă cazurile:
- $\hat{2} \cdot \hat{a} = \hat{2}$ cu soluțiile $\hat{a} \in \{\hat{1}, \hat{4}\}$;
- $\hat{2} \cdot \hat{a} = \hat{1} + \hat{5} = \hat{0}$, cu soluțiile $\hat{a} \in \{\hat{0}, \hat{3}\}$.

Așadar, A este inversabilă pentru $\hat{a} \in \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{3}, \hat{4}\}$.

## 1.3. Inele de funcții reale

Fie $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ inelul numerelor reale, $M \subset \mathbb{R}$ o mulțime nevidă și $\mathcal{F}(M) = \{f \mid f : M \to \mathbb{R}\}$.

Pe mulțimea $\mathcal{F}(M)$ se definesc operațiile de adunare și înmulțire a funcțiilor:

„ + “: $\mathcal{F}(M) \times \mathcal{F}(M) \to \mathcal{F}(M)$, $(f, g) \to f + g$, $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, $x \in M$,

„ · “: $\mathcal{F}(M) \times \mathcal{F}(M) \to \mathcal{F}(M)$, $(f, g) \to f \cdot g$, $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$, $x \in M$.

Referitor la operațiile de adunare și înmulțire a funcțiilor reale are loc următorul rezultat:

**▣ TEOREMA 3**

Tripletul $(\mathcal{F}(M), +, \cdot)$ este inel comutativ, numit inelul funcțiilor definite pe M cu valori în $\mathbb{R}$.

*Demonstrație*

Verificarea axiomelor structurii de inel se face având în vedere proprietățile adunării și înmulțirii numerelor reale.

**Axioma grupului**: $(\mathcal{F}(M), +)$ este grup comutativ.

• *Asociativitatea.* Fie $f, g, h \in \mathcal{F}(M)$. Atunci, pentru $x \in M$, avem: $((f+g)+h)(x) = (f+g)(x) + h(x) = (f(x)+g(x)) + h(x) = f(x) + (g(x)+h(x)) =$ $= f(x) + (g+h)(x) = (f+(g+h))(x)$. Așadar: $(f+g)+h = f+(g+h)$.

• *Element neutru.* Se observă ușor că funcția nulă, $f : M \to \mathbb{R}, f(x) = 0$, este element neutru față de adunare.

• *Elemente simetrizabile.* Dacă $f \in \mathcal{F}(M)$, atunci funcția $-f \in \mathcal{F}(M)$ este elementul simetric pentru funcția f.

• *Comutativitatea.* Fie $f, g \in \mathcal{F}(M)$. Atunci, pentru $x \in M$ avem: $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g+f)(x)$, deci $f + g = g + f$.

**Axioma monoidului**: $(\mathcal{F}(M), \cdot)$ este monoid comutativ.

• *Asociativitatea.* Fie $f, g, h \in \mathcal{F}(M)$. Pentru $x \in M$, avem:

$((f \cdot g) \cdot h)(x) = (f \cdot g)(x) \cdot h(x) = (f(x) \cdot g(x)) \cdot h(x) = f(x) \cdot (g(x) \cdot h(x)) =$ $= f(x) \cdot (gh)(x) = (f \cdot (gh))(x)$, deci $(fg) \cdot h = f \cdot (gh)$.

• *Elementul neutru.* Funcția $f \in \mathcal{F}(M)$, $f : M \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1$, $x \in \mathbb{R}$, este element neutru în raport cu înmulțirea funcțiilor.

• *Comutativitatea.* Dacă $f, g \in \mathscr{F}(M)$ și $x \in M$, avem:
$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = g(x) \cdot f(x) = (g \cdot f)(x)$, deci $f \cdot g = g \cdot f$.

**Axiomele de distributivitate**

Fie $f, g, h \in \mathscr{F}(M)$ și $x \in M$. Se obține succesiv:

$(f \cdot (g + h))(x) = f(x) \cdot (g + h)(x) = f(x) \cdot (g(x) + h(x)) = f(x) \cdot g(x) +$
$+ f(x) \cdot h(x) = (f \cdot g)(x) + (f \cdot h)(x) = (f \cdot g + f \cdot h)(x)$, deci $f \cdot (g + h) = f \cdot g + f \cdot h$.

Analog se arată că $(f + g) \cdot h = f \cdot h + g \cdot h$.

Așadar $(\mathscr{F}(M), +, \cdot)$ este inel comutativ.

## ➲ OBSERVAȚII

**1.** În cazul în care funcțiile din mulțimea $\mathscr{F}(M)$ au anumite proprietăți, se obțin inele remarcabile de funcții reale.

- Dacă $\mathscr{C}([a, b]) = \{f : [a, b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ continuă}\}$, se obține inelul comutativ $(\mathscr{C}([a, b]), +, \cdot)$ al funcțiilor continue.
- Dacă $\mathscr{D}([a, b]) = \{f : [a, b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ derivabilă}\}$, se obține inelul comutativ $(\mathscr{D}([a, b]), +, \cdot)$ al funcțiilor derivabile.
- Pentru $\mathscr{M} = \{f : M \to \mathbb{R} \mid f \text{ mărginită}\}$, se obține inelul comutativ $(\mathscr{M}, +, \cdot)$ al funcțiilor mărginite.
- Pentru $P_T = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ periodică de perioadă } T > 0\}$, se obține inelul comutativ $(P_T, +, \cdot)$.

**2.** Există inele de funcții reale nu numai în raport cu adunarea și înmulțirea funcțiilor.

Dacă $(G, +)$ este un subgrup al grupului aditiv $(\mathbb{R}, +)$, atunci tripletul $(\text{End}(G), +, \circ)$ este inel necomutativ (inelul endomorfismelor lui G).

### ❑ TEMĂ

**1. Să se demonstreze afirmațiile din observațiile 1 și 2.**

**2. Temă de studiu.**

**a) Dacă $\mathscr{P} = \{f : [a, b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ are primitive}\}$, tripletul $(\mathscr{P}, +, \cdot)$ este inel?**

**b) Dacă $\mathscr{I} = \{f : [a, b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ integrabilă pe } [a, b]\}$, tripletul $(\mathscr{I}, +, \cdot)$ este inel?**

# EXERCIȚII ȘI PROBLEME

## EXERSARE

**E1.** Să se studieze distributivitatea legii de compoziție „ $\top$ “ în raport cu legea de compoziție „ $\perp$ “, pe mulțimea M, în cazurile:

a) $M = \mathbb{Q}$, $x \top y = \frac{1}{2}xy$, $x \perp y = 2x + 2y$;

b) $M = \mathbb{Q}$, $x \top y = xy$, $x \perp y = x + y + 1$;

c) $M = \mathbb{R}$, $x \top y = 2xy + 4x + 4y + 6$, $x \perp y = x + y + 2$;

d) $M = \mathbb{R}$, $x \top y = -xy + 3x + 3y - 6$, $x \perp y = x + y - 3$.

**E2.** Pe mulțimea $\mathbb{Z}$ se consideră operațiile algebrice $x \perp y \overset{def}{=} x + y + 2$ și $x \top y = xy + 2x + 2y + 2$.

a) Să se arate că $(\mathbb{Z}, \perp, \top)$ este un inel comutativ.

b) Să se determine elementele inversabile ale inelului.

**E3.** Să se studieze dacă $(\mathbb{Z}, \perp, \top)$ este inel și să se determine elementele inversabile, în cazurile:

a) $x \perp y = x + y - 3$, $x \top y = xy - 3x - 3y + 12$;

b) $x \perp y = x + y + 2$, $x \top y = 2xy + 4x + 4y + 6$;

c) $x \perp y = x + y - 5$, $x \top y = xy - 5x - 5y + 30$.

**E4.** Să se studieze dacă adunarea și înmulțirea matricelor determină pe mulțimea M o structură de inel, pentru:

a) $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \middle| \; a, b \in \mathbb{R} \right\}$;

b) $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \middle| \; a, b \in \mathbb{R} \right\}$;

c) $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a+b \end{pmatrix} \middle| \; a, b \in \mathbb{Q} \right\}$;

d) $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & 2b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \; a, b \in \mathbb{Q} \right\}$;

e) $M = \left\{ \begin{pmatrix} a+b & 4b \\ -b & a-b \end{pmatrix} \middle| \; a, b \in \mathbb{Q} \right\}$.

## APROFUNDARE

**A1.** Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se definesc operațiile algebrice:

$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(x, y) \to x \perp y \overset{def}{=} \max\{x, y\}$;

$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(x, y) \to x \top y \overset{def}{=} \min\{x, y\}$.

Să se studieze distributivitatea operației „ $\perp$ “ în raport cu operația „ $\top$ “ și a operației „ $\top$ “ în raport cu operația „ $\perp$ “.

**A2.** Pe mulțimea $\mathbb{Z}$ se definesc legile de compoziție:

$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $(x, y) \to x \perp y \overset{def}{=} x + y - 3$;

$(x, y) \to x \top y \overset{def}{=} x \cdot y - 3x + ay + b$.

Să se determine $a, b \in \mathbb{Z}$, astfel încât legea de compoziție „ $\perp$ “ să fie distributivă în raport cu „ $\top$ “.

**A3.** Pe mulțimea $\mathbb{C}$ se consideră operațiile algebrice $x \perp y \overset{def}{=} x + y$ și $x \top y \overset{def}{=} xy + \text{Im}(x) \cdot \text{Im}(y)$.

a) Să se arate că tripletul $(\mathbb{C}, \perp, \top)$ este inel comutativ.

b) Să se determine elementele inversabile ale acestui inel.

**A4.** Pe mulțimea $M = (0, +\infty)$ se definesc operațiile algebrice:
$x \perp y \overset{def}{=} x \cdot y$ și $x \top y \overset{def}{=} x^{\ln y}$.
a) Să se arate că $(M, \perp, \top)$ este inel comutativ.
b) Să se determine $\mathcal{U}(M)$.

**A5.** Fie $a \in \mathbb{R}$ și mulțimea:
$$\mathcal{M}_a = \left\{ A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \,\middle|\, A \cdot \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \cdot A \right\}.$$
a) Să se arate că $(\mathcal{M}_a, +, \cdot)$ este inel.
b) Să se determine $\mathcal{U}(M_a)$.

**A6.** Pe mulțimea $A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ se definesc operațiile algebrice:
$(x, y) + (a, b) \overset{def}{=} (x + a, y + b)$,
$(x, y) \cdot (a, b) = (xa, xb + ya)$
a) Să se arate că $(A, +, \cdot)$ este un inel.
b) Să se determine $\mathcal{U}(A)$.

**A7.** Se consideră mulțimea:
$\mathcal{F} = \{ f_a : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \mid f_a(x) = a \cdot x, a \in \mathbb{Z} \}$.
Să se studieze dacă următoarele triplete formează inel și să se afle $\mathcal{U}(\mathcal{F})$ în fiecare caz:
a) $(\mathcal{F}, +, \cdot)$; b) $(\mathcal{F}, +, \circ)$.

**A8.** Să se arate că mulțimea:
$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ \hat{0} & c \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b, c \in \mathbb{Z}_2 \right\},$$
împreună cu adunarea și înmulțirea matricelor formează un inel. Să se determine numărul elementelor acestui inel și $\mathcal{U}(M)$.

**A9.** Se consideră mulțimea $M = \{a, b, c\}$.
a) Să se arate că $(\mathcal{P}(M), \Delta, \cap)$ este un inel comutativ.
b) Să se determine $\mathcal{U}(\mathcal{P}(M))$.

**A10.** Fie $(A, +, \cdot)$ și $(B, +, \cdot)$ două inele. Pe mulțimea $M = A \times B$ se definesc operațiile algebrice:
$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) \overset{def}{=} (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$
și $(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) \overset{def}{=} (a_1 \cdot a_2, b_1 \cdot b_2)$.
a) Să se arate că $(M, +, \cdot)$ este un inel, numit produsul inelelor A și B.
b) Să se arate că $\mathcal{U}(M) = \mathcal{U}(A) \cdot \mathcal{U}(B)$.

**A11.** Să se determine produsul inelelor:
a) $(\mathbb{Z}_2, +, \cdot)$ și $(\mathbb{Z}_2, +, \cdot)$;
b) $(\mathbb{Z}_2, +, \cdot)$ și $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$.

## 2 Reguli de calcul într-un inel

Calculul algebric cu elementele unui inel $(A, +, \cdot)$ respectă toate regulile de calcul date pentru grup și monoid, când sunt implicate separat adunarea, respectiv înmulțirea inelului. În afară de acestea, într-un inel există și alte reguli de calcul specifice, care fac legătura între cele două operații algebrice ale inelului.

Fie $(A, +, \cdot)$ un inel cu elementul nul 0 și elementul unitate 1. Din definiția acestora se obține că: $0 + 0 = 0$ și $1 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 0$.

**▣ TEOREMA 4 (înmulțirea cu 0 în inel)**

Fie $(A, +, \cdot)$ un inel nenul. Pentru oricare $a \in A$, au loc relațiile:

**a)** $a \cdot 0 = 0$;

**b)** $0 \cdot a = 0$.

*Demonstrație*

**a)** Fie $a \in A$ și $x = a \cdot 0$.

Se obține: $x = a \cdot 0 = a \cdot (0+0) = a \cdot 0 + a \cdot 0 = x + x$.

Aplicând regula reducerii în grupul $(A, +)$ se obține $x = 0$, deci $a \cdot 0 = 0$.

**b)** Se consideră $x = 0 \cdot a$ și se obține:
$x = (0+0) \cdot a = 0 \cdot a + 0 \cdot a = x + x$, de unde rezultă că $x + x = x$ și $x = 0$. ■

**➲ OBSERVAȚII**

**1.** Dacă într-un inel $(A, +, \cdot)$ avem $1 = 0$, atunci pentru $a \in A$ se obține: $a = a \cdot 1 = a \cdot 0 = 0$, deci $A = \{0\}$. Inelul în care $1 = 0$ se numește **inel nul**. **În continuare se va presupune că $1 \neq 0$ și inelul $(A, +, \cdot)$ nu este inel nul.**

**2.** Reciproca teoremei 4 nu este adevărată, deoarece există inele $(A, +, \cdot)$ în care un produs să fie egal cu $0_A$, fără ca unul din factorii produsului să fie $0_A$.

☞ ***Exemple***

- În inelul de matrice $(\mathcal{M}_2(\mathbb{C}), +, \cdot)$ avem: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_2$.
- În inelul $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$ avem: $\hat{2} \cdot \hat{3} = \hat{0}$, $\hat{3} \cdot \hat{4} = \hat{0}$.

## Divizori ai lui zero într-un inel

**❖ DEFINIȚIE**

- Fie $(A, \perp, \top)$ un inel cu elementul nul $0_A$. Un element $d \in A \setminus \{0_A\}$ se numește **divizor al lui zero** dacă există $d' \in A \setminus \{0_A\}$, astfel încât: $d \top d' = 0_A$ sau $d' \top d = 0_A$.

După cum s-a constatat în exemplele date în observația 2, inelele $(\mathcal{M}_2(\mathbb{C}), +, \cdot)$ și $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$ au divizori ai lui zero.

**❖ DEFINIȚIE**

- Un inel comutativ nenul și fără divizori ai lui zero se numește **domeniu de integritate** sau **inel integru**.

## ➲ OBSERVAȚII

1. Inelele numerice $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ sunt domenii de integritate.
2. Fie $(A, \perp, \top)$ un domeniu de integritate. Atunci $x \top y = 0_A \Leftrightarrow x = 0_A$ sau $y = 0_A$.
3. Fie $n \geq 2$ un număr natural compus. Atunci inelul $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ nu este domeniu de integritate. Într-adevăr, dacă $n = p \cdot q$, cu $p, q \geq 2$, se obține: $\hat{0} = \hat{n} = \hat{p} \cdot \hat{q}$, deci $\hat{p}$ și $\hat{q}$ sunt divizori ai lui zero.
4. Orice divizor al lui zero al inelului $(A, +, \cdot)$ nu este element inversabil. Într-adevăr, fie $a \in A$, divizor al lui zero. Dacă $a \in \mathcal{U}(A)$, există $b \in \mathcal{U}(A)$, astfel încât $a \cdot b = 1$ și $b \cdot a = 1$. Deoarece a este divizor al lui zero rezultă că există $c \in A \setminus \{0\}$, astfel încât $c \cdot a = 0$. Din relația $a \cdot b = 1$ se obține $c \cdot (ab) = c$ și $(ca) \cdot b = c$, deci $0 = c$, în contradicție cu $c \neq 0$. Așadar, $a \notin \mathcal{U}(A)$.

Următoarea teoremă dă o caracterizare a divizorilor lui zero în inelul claselor de resturi modulo n.

## ▣ TEOREMA 5

Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și $\hat{x} \in \mathbb{Z}_n$. Clasa de resturi $\hat{x}$ este divizor al lui zero dacă și numai dacă $(x, n) = d > 1$.

<u>*Demonstrație*</u>

Să presupunem că $(x, n) = d > 1$. Rezultă că există $p, q \in \{2, 3, ..., n-1\}$ astfel încât $x = p \cdot d$ și $n = q \cdot d$.

Se obține: $\hat{x} \cdot \hat{q} = \widehat{(pd)q} = \widehat{p(qd)} = \widehat{p \cdot n} = \hat{0}$, deci $\hat{x}$ este divizor al lui zero.

Reciproc, să presupunem că $\hat{x}$ este divizor al lui zero. Rezultă că există $\hat{p} \in \mathbb{Z}_n \setminus \{\hat{0}\}$, astfel încât $\hat{x} \cdot \hat{p} = \hat{0}$. Dacă am avea $(x, n) = 1$, ar exista $r, s \in \mathbb{Z}$, astfel încât $rx + sn = 1$.

Din această relație se obține:

$\hat{1} = \widehat{rx + sn} = \widehat{rx} + \widehat{sn} = \hat{r} \cdot \hat{x} + \hat{0} = \hat{r} \cdot \hat{x}$, deci $\hat{x} \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}_n)$, ceea ce nu se poate. Așadar, $(x, n) > 1$. ■

### ❑ <u>TEMĂ</u>

**1. Să se determine divizorii lui zero în inelele $\mathbb{Z}_4$, $\mathbb{Z}_{16}$, $\mathbb{Z}_{24}$ și $\mathbb{Z}_{100}$.**

**2. Să se arate că dacă $\hat{a}, \hat{b} \in \mathbb{Z}_n$ sunt divizori ai lui zero, atunci $\hat{a} \cdot \hat{b}$ este divizor al lui zero. Elementul $\hat{a} + \hat{b}$ este divizor al lui zero în $\mathbb{Z}_n$?**

## Regula semnelor într-un inel

Fie $(A, +, \cdot)$ un inel. Deoarece $(A, +)$ este un grup comutativ, sunt valabile regulile de calcul specifice grupului. Astfel, în notație aditivă, avem:

- $\mathbf{-(-a) = a, \ \forall\ a \in A}$ **(1)**
- $\mathbf{-(a+b) = (-a)+(-b), \ \forall\ a, b \in A}$ **(2)**
- $\mathbf{a + b = 0 \Rightarrow b = -a}$ **și** $\mathbf{a = -b, \ \forall\ a, b \in A}$ **(3)**

Dacă în locul scrierii $a+(-b)$ se folosește scrierea $a-b$, relația (2) devine: $-(a+b) = -a-b$, sau, mai general:

$-(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = -a_1 - a_2 - \ldots - a_n, \ \forall\ a_1, a_2, \ldots, a_n \in A, n \in \mathbb{N}^*.$

În cazul inelelor numerice $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ se regăsește regula schimbării semnului termenilor unei sume dintr-o paranteză, dacă în fața acesteia se află semnul minus.

▣ **TEOREMA 6 (regula semnelor)**

Fie $(A, +, \cdot)$ un inel. Atunci:

**a)** $(-a)\cdot b = a\cdot(-b) = -(ab), \forall a, b \in A;$

**b)** $(-a)\cdot(-b) = ab, \ \forall\ a, b \in A.$

| |
|---|
| $+\cdot+=+$ |
| $-\cdot-=+$ |
| $+\cdot-=-$ |
| $-\cdot+=-$ |

*Demonstrație*

**a)** Fie $a, b \in A$. Se obține succesiv:

$0 = 0\cdot b = \left[a+(-a)\right]\cdot b = a\cdot b + (-a)\cdot b$, deci $ab + (-a)\cdot b = 0$.

Din această egalitate rezultă că $(-a)b = -(ab)$.

Analog, se arată că $a\cdot(-b) = -(ab)$.

**b)** Rezultă succesiv: $(-a)\cdot(-b) \overset{a)}{=} -\left(a\cdot(-b)\right) = -\left(-(ab)\right) = ab.$ ■

➲ **OBSERVAȚIE**

- În inelul $(A, +, \cdot)$ au loc egalitățile: $(-1)\cdot a = -a$ și $a\cdot(-1) = -a, \ \forall\ a \in A$.

### *Problemă rezolvată*

☒ Fie $(A, +, \cdot)$ un inel și $x \in A$. Să se arate că dacă $x \in \mathcal{U}(A)$, atunci $-x \in \mathcal{U}(A)$.

*Soluție*

Fie $x \in \mathcal{U}(A)$. Rezultă că există $x' \in \mathcal{U}(A)$, astfel încât $x\cdot x' = 1$.

Se obține: $(-x)\cdot(-x')=x\cdot x'=1$.

Așadar, $-x\in\mathcal{U}(A)$.

Mai mult, în inelul $(A, +, \cdot)$ se obține: $(-x)^{-1}=-x^{-1}$.

## Legi de simplificare în inele integre

Fie $(A, +, \cdot)$ un inel. Deoarece $(A, \cdot)$ nu este grup, regulile de simplificare în raport cu înmulțirea inelului nu pot fi aplicate în orice inel.

**▣ TEOREMA 7**

Fie $(A, +, \cdot)$ un inel integru, $a\in A\setminus\{0\}$ și $x, y\in A$.

**a)** Dacă $ax=ay$, atunci $x=y$ (legea de simplificare la stânga).

**b)** Dacă $xa=ya$, atunci $x=y$ (legea de simplificare la dreapta).

*Demonstrație*

**a)** Din $ax=ay$ rezultă succesiv:

$ax+(-ay)=ay+(-ay)=0$, (1).

Folosind regula semnelor în inel, relația (1) se scrie:

$0=ax+(-ay)=ax+a\cdot(-y)=a[x+(-y)]$.

Deoarece inelul este integru și $a\neq 0$, se obține că $x+(-y)=0$, relație care conduce la egalitatea $x=-(-y)=y$.

**b)** Se demonstrează analog punctului a). (Temă) ■

Legile de simplificare sunt utile în rezolvarea ecuațiilor într-un domeniu de integritate.

### *Problemă rezolvată*

☒ Să se rezolve în $\mathbb{Z}_7$ ecuațiile:

**a)** $x^2+x-\hat{2}=\hat{0}$;

**b)** $x^3-\hat{3}x+\hat{2}=\hat{0}$.

*Soluție*

**a)** Ecuația se transformă succesiv:

$x^2-\hat{1}+x-\hat{1}=\hat{0}$, $(x-\hat{1})(x+\hat{1})+(x-\hat{1})=\hat{0}$

și se obține $(x-\hat{1})(x+\hat{2})=\hat{0}$.

Deoarece inelul $\mathbb{Z}_7$ este inel integru, rezultă că $x-\hat{1}=\hat{0}$ sau $x+\hat{2}=\hat{0}$, cu soluțiile $x=\hat{1}$ și $x=\hat{5}$.

**❑ TEMĂ DE STUDIU**

**Să se arate că într-un inel comutativ au loc următoarele formule de calcul:**

**a)** $(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$;

**b)** $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$;

**c)** $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$;

**d)** $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$;

**e)** $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$.

**f)** $(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^{n-k}\cdot b^k$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, **(binomul lui Newton).**

Mulțimea soluțiilor ecuației este $S = \{\hat{1}, \hat{5}\}$.

**b)** Ecuația poate fi adusă la forma: $(x - \hat{1})^2 \cdot (x + \hat{2}) = \hat{0}$.

Mulțimea soluțiilor ecuației este $S = \{\hat{1}, \hat{5}\}$.

## EXERCIȚII ȘI PROBLEME

### EXERSARE

**E1.** **Să se determine elementele $x \in \mathbb{Z}_n$ care sunt divizori ai lui zero, în cazurile:**
**a) $n = 4$; b) $n = 6$; c) $n = 8$; d) $n = 60$.**

**E2.** **Să se arate că următoarele inele nu sunt inele integre:**
**a) $(\mathcal{F}(\mathbb{Z}), +, \cdot)$; b) $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$.**

**E3.** **Pe mulțimea $E = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ se definesc operațiile algebrice $(a, b) + (x, y) = (a + x, b + y)$ și $(a, b) \cdot (x, y) = (ax + 2by, ay + bx)$.**

**a) Să se arate că $(E, +, \cdot)$ este inel.**

**b) Să se determine divizorii lui zero și $\mathcal{U}(E)$.**

**E4.** **Fie $(A, +, \cdot)$ un inel. Să se arate că:**
**a) $-(-a - b) = a + b$;**
**b) $(-a) \cdot (-b - c) = ab + ac$;**
**c) $(-a + b) \cdot (a + b) = b^2 - a^2$, dacă $ab = ba$.**

**E5.** **Să se arate că într-un inel comutativ $(A, +, \cdot)$ are loc egalitatea:**
**$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$.**
**Ce devine această egalitate în $\mathbb{Z}_2$? Dar în $\mathbb{Z}_3$?**

**E6.** **Să se arate că în inelul $\mathbb{Z}_2$ au loc egalitățile:**
**a) $(a + b)^2 = a + b$;**
**b) $(a + b)^n = a + b, \ \forall \ n \in \mathbb{N}^*$.**

**E7.** **Să se arate că în inelul $\mathbb{Z}_4$ au loc relațiile:**
**a) $(a + b)^2 = a^2 - \hat{2}ab + b^2$;**
**b) $(a - b)^2 = a^2 + \hat{2}ab + b^2$;**
**c) $(a + b)^4 = (a^2 + b^2)^2 = (a^2 - b^2)^2$.**

**E8.** **Să se rezolve ecuațiile:**
**a) $x^2 + \hat{2} = \hat{0}$ în $\mathbb{Z}_3$ și $\mathbb{Z}_6$;**
**b) $x^4 + x^2 + \hat{1} = \hat{0}$ în $\mathbb{Z}_3$ și $\mathbb{Z}_7$;**
**c) $x^6 + \hat{6} = \hat{0}$ în $\mathbb{Z}_7$.**

**E9.** **Fie $(A, +, \cdot)$ un inel comutativ și $a, b \in A$, astfel încât $a^2 = a$, $b^2 = b$ și $M = \{ab, 1 - a, 1 - b\}$. Să se arate că dacă $x \in M$, atunci $x^2 = x$.**

### APROFUNDARE

**A1.** **Să se rezolve în $\mathbb{Z}_{12}$ sistemele:**

**a)** $\begin{cases} \hat{5}x + \hat{2}y = \hat{1} \\ \hat{4}x + \hat{9}y = \hat{2} \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} \hat{5}x + \hat{2}y = \hat{1} \\ \hat{3}x + \hat{3}y = \hat{1} \end{cases}$.

**A2.** **Să se rezolve în $\mathbb{Z}_8$ sistemele:**

**a)** $\begin{cases} \hat{2}x + \hat{5}y = \hat{2} \\ \hat{3}x + \hat{7}y = \hat{6} \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} x + \hat{5}y = \hat{2} \\ \hat{3}x + \hat{7}y = \hat{6} \end{cases}$.

**A3.** Fie $(A, +, \cdot)$ un inel și $a, b \in A$.
Să se arate că dacă $x = 1 - ab$ este element inversabil, atunci $1 - ba$ este inversabil și $(1 - ba)^{-1} = 1 + bx^{-1}a$.

**A4.** Fie $(A, +, \cdot)$ un inel și $a \in A$, astfel încât $a^2 = 0$. Să se arate că elementele $1 - a$ și $1 + a$ sunt inversabile.

**A5.** Fie $(A, +, \cdot)$ un inel și $a \in A$. Să se arate că dacă există $n \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $a^n = 0$, elementul $1 - a$ este inversabil.

**A6.** Fie $(A, +, \cdot)$ un inel astfel încât $x^2 = x$, $\forall\ x \in A$. (inelul A se numește *inel boolean*).
Să se arate că:
a) $x + x = 0$, $\forall\ x \in A$;
b) $(x + y)^2 = x + y$, $\forall\ x, y \in A$;
c) inelul A este comutativ.

**A7.** Să se arate că inelul $(A, +, \cdot)$ este comutativ dacă are loc una dintre proprietățile:
a) $x^6 = x$, $\forall\ x \in A$;
b) $x^{12} = x$, $\forall\ x \in A$.

**A8.** Fie $(A, +, \cdot)$ un inel și $a, b \in A$, $n \in \mathbb{N}^*$.
Să se arate că dacă $1 - (ab)^n$ este inversabil, atunci și $1 - (ba)^n$ este inversabil.

## DEZVOLTARE

**D1.** Fie $(A, +, \cdot)$ un inel nenul.
a) Cel mai mic număr $n \in \mathbb{N}^*$, cu proprietatea că $n \cdot 1 = 0_A$ se numește *caracteristica* inelului A. Să se determine caracteristica inelelor $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_4$. Generalizare.
b) Un inel $(A, +, \cdot)$ are caracteristica zero, dacă pentru oricare $n \in \mathbb{N}^*$, $n \cdot 1 \neq 0_A$. Să se arate că inelele numerice $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ au caracteristica zero.

**D2.** Să se arate că într-un inel $(A, +, \cdot)$ cu caracteristica 2 au loc relațiile:
a) $(a + b)^2 = a^2 + b^2$, $\forall\ a, b \in A$;
b) $(a + b)^{2^n} = a^{2^n} + b^{2^n}$, $\forall\ a, b \in A$, $n \in \mathbb{N}^*$.

**D3.** Să se arate că orice inel cu caracteristica 4 are divizori ai lui zero.

**D4.** Să se arate că orice inel integru are caracteristica zero sau un număr prim.

**D5.** Să se arate că într-un inel comutativ $(A, +, \cdot)$ cu caracteristica $p \in \mathbb{N}^*$, p număr prim, există relația:
$(a + b)^p = a^p + b^p$, $\forall\ a, b \in A$.

# 3 Corpuri

Inelele numerice $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ și $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ au proprietatea remarcabilă că oricare element nenul este inversabil. Pentru aceste inele mulțimea unităților este $\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{R}^*$, respectiv $\mathbb{C}^*$.

## ❖ DEFINIȚII

- Un inel nenul $(K, +, \cdot)$ în care oricare element nenul este inversabil, se numește **corp**.
- Dacă inelul K este comutativ, corpul K se numește **corp comutativ**.

Tripletele $(\mathbb{Q}, +, \cdot), (\mathbb{R}, +, \cdot)$ și $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ sunt corpuri comutative.

## ➲ OBSERVAȚII

**1.** Pentru un corp $(K, +, \cdot)$ există egalitatea: $\mathcal{U}(K) = K \setminus \{0\} = K^*$.

Rezultă că perechea $(K^*, \cdot)$ este grup.

Așadar, tripletul $(K, +, \cdot)$ este corp dacă verifică axiomele:

**a)** $(K, +)$ este grup comutativ;

**b)** $(K^*, \cdot)$ este grup, numit **grupul multiplicativ al corpului K**;

**c)** înmulțirea este distributivă față de adunare.

**2.** Un corp $(K, +, \cdot)$ nu are divizori ai lui zero.

Într-adevăr, dacă $a, b \in K^*$, astfel încât $a \cdot b = 0$, atunci se obține: $a^{-1} \cdot a \cdot b = a^{-1} \cdot 0$ sau $1 \cdot b = 0$, deci $b = 0$, în contradicție cu $b \in K^*$.

**3.** Inelele $(\mathbb{Q}, +, \cdot), (\mathbb{R}, +, \cdot), (\mathbb{C}, +, \cdot)$ sunt corpuri deoarece oricare element nenul este inversabil. Acestea sunt numite **corpuri numerice**.

## *Problemă rezolvată*

☒ Fie $d \in \mathbb{N}^*$ un număr natural liber de pătrate și $\mathbb{Q}(\sqrt{d}) = \{a + b\sqrt{d} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$, $\mathbb{Q}(i\sqrt{d}) = \{a + bi\sqrt{d} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$.

Să se arate că $(\mathbb{Q}(\sqrt{d}), +, \cdot), (\mathbb{Q}(i\sqrt{d}), +, \cdot)$ sunt corpuri comutative (corpuri de numere pătratice).

*Soluție*

Pentru $x, y \in \mathbb{Q}(\sqrt{d})$, $x = a + b\sqrt{d}$, $y = u + v\sqrt{d}$, se obține:

$x + y = a + u + (b + v)\sqrt{d} \in \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ și $x \cdot y = au + bvd + (av + bu)\sqrt{d} \in \mathbb{Q}(\sqrt{d})$.

Rezultă că $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ este parte stabilă a lui $\mathbb{C}$ în raport cu adunarea și înmulțirea.

Perechea $(\mathbb{Q}\sqrt{d}, +)$ este grup abelian, deoarece adunarea este asociativă și comutativă; numărul $0 = 0 + 0\sqrt{d} \in \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ este element neutru,

iar dacă $x = a + b\sqrt{d} \in \mathbb{Q}(\sqrt{d})$, atunci $-x = (-a) + (-b)\sqrt{d} \in \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ este opusul lui x.

Perechea $(\mathbb{Q}(\sqrt{d}) \setminus \{0\}, \cdot)$ este grup comutativ.

Într-adevăr, înmulțirea este asociativă și comutativă, elementul $1 = 1 + 0\sqrt{d} \in \mathbb{Q}(\sqrt{d}) \setminus \{0\}$ este element neutru.

Fie $x = a + b\sqrt{d} \in \mathbb{Q}(\sqrt{d}) \setminus \{0\}$.

Să determinăm $x' \in \mathbb{Q}(\sqrt{d}) \setminus \{0\}$, astfel ca $xx' = 1$. Avem:

$$x' = \frac{1}{x} = \frac{1}{a + b\sqrt{d}} = \frac{a - b\sqrt{d}}{a^2 - b^2 d} = \frac{a}{a^2 - b^2 d} - \frac{b}{a^2 - b^2 d}\sqrt{d} \in \mathbb{Q}(\sqrt{d}) \setminus \{0\}.$$

Se observă că $a^2 - b^2 d \neq 0$, deoarece din $a^2 - b^2 d = 0$ ar rezulta $a = \pm b\sqrt{d}$, în contradicție cu $a \in \mathbb{Q}^*$.

În concluzie, $(\mathbb{Q}(\sqrt{d}) \setminus \{0\}, \cdot)$ este grup comutativ.

Deoarece înmulțirea este distributivă în raport cu adunarea, se obține că $(\mathbb{Q}(\sqrt{d}), +, \cdot)$ este un corp comutativ.

Analog se arată că $(\mathbb{Q}(i\sqrt{d}), +, \cdot)$ este corp comutativ.

În acest corp: $x' = \dfrac{1}{a + bi\sqrt{d}} = \dfrac{a}{a^2 + b^2 d} + \dfrac{-bi}{a^2 + b^2 d}\sqrt{d} \in \mathbb{Q}(i\sqrt{d})$.

**▣ TEOREMA 8**

Inelul $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ este corp dacă și numai dacă n este număr prim.

*Demonstrație*

Fie n număr prim. Atunci pentru orice $\hat{x} \in \mathbb{Z}_n$, $x \in \{1, 2, ..., n-1\}$ avem $(n, x) = 1$, deci $\hat{x} \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}_n)$. Așadar, $\mathbb{Z}_n$ este corp comutativ.

Reciproc, fie că $\mathbb{Z}_n$ este corp. Dacă, prin absurd, n nu este număr prim, rezultă că există $p, q \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, astfel încât $n = p \cdot q$. Se obține $\hat{p} \cdot \hat{q} = \hat{n} = \hat{0}$, deci $\mathbb{Z}_n$ are divizori ai lui zero, în contradicție cu faptul că $\mathbb{Z}_n$ este corp.

Așadar, n este număr prim. ■

**➲ OBSERVAȚII**

**1.** Dacă $p \in \mathbb{N}$ este un număr prim, atunci există corpuri cu p elemente. Un astfel de corp este $\mathbb{Z}_p$.

**2.** Orice corp finit $(K, +, \cdot)$ are $p^n$ elemente, unde p este număr prim.
În concluzie, nu există corpuri cu 6, 10, 12 elemente.

**3.** Orice corp finit este comutativ, **(Teorema lui Wedderburn)**.



*Joseph WEDDERBURN (1882-1948) matematician scoțian*

*A adus contribuții în cadrul algebrei moderne.*

### Corpuri de matrice

Inelul de matrice pătratice $\left(\mathcal{M}_n(A), +, \cdot\right)$, unde $(A, +, \cdot)$ este inel, nu este în general corp.

Într-adevăr, dacă $A = \mathbb{R}$, atunci în inelul $\left(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot\right)$ matricea $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, este divizor al lui zero, având $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_2$.

Condiția ca inelul $\left(\mathcal{M}_n(A), +, \cdot\right)$ să fie corp este ca $\forall\, M \in \mathcal{M}_n(A)$ să fie matrice inversabilă, ceea ce revine la faptul că $\det(M) \in \mathcal{U}(A)$.

❑ **TEMĂ DE PROIECT**

**1. Să se arate că următoarele inele de matrice $(\mathcal{C}, +, \cdot)$ sunt corpuri:**

**a)** $\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \middle|\ a, b \in \mathbb{R} \right\}$;

**b)** $\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} a & bd \\ b & a \end{pmatrix} \middle|\ a, b \in \mathbb{Q},\ d \in \mathbb{Q}_+,\ \sqrt{d} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \right\}$;

**c)** $\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} \middle|\ a, b \in \mathbb{C} \right\}$ **(corpul cuaternionilor).**

## EXERCIȚII ȘI PROBLEME

### EXERSARE

**E1.** **Pe mulțimea $\mathbb{Q}$ se definesc operațiile algebrice $x \perp y \overset{def}{=} x + y - 5$ și $x \top y \overset{def}{=} -xy + 5x + 5y - 20$. Să se studieze dacă tripletul $(\mathbb{Q}, \perp, \top)$ este corp.**

**E2.** **Să se arate că tripletul $(M, \perp, \top)$ este corp comutativ, dacă:**

**a)** $M = \mathbb{Q}$, $x \perp y = x + y - 4$, $x \top y = xy - 4(x + y) + 20$;

**b)** $M = \mathbb{R}$, $x \perp y = x + y + \dfrac{3}{4}$, $x \top y = 4xy + 3x + 3y + 1{,}5$;

c) $M = \mathbb{R}$, $x \perp y = x + y - 1$,
$x \top y = 2xy - 2x - 2y + 3$;

d) $M = \mathbb{R}$, $x \perp y = x + y - 2$,
$x \top y = \frac{1}{4}xy - \frac{1}{2}(x + y) + 3$.

**E3.** Să se arate că mulțimea M împreună cu adunarea și înmulțirea matricelor determină o structură de corp, dacă:

a) $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R} \right\}$;

b) $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & 7b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{Q} \right\}$;

c) $M = \left\{ \begin{pmatrix} a + b & 4b \\ -b & a - b \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{Q} \right\}$;

d) $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ ia & 0 \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{C} \right\}$.

**E4.** Fie $\varepsilon \in \mathbb{C}$ o soluție a ecuației $x^2 + x + 1 = 0$ și mulțimea $\mathbb{R}(\varepsilon) = \{a + b\varepsilon \mid a, b \in \mathbb{R}$. Să se arate că $\mathbb{R}(\varepsilon)$ împreună cu adunarea și înmulțirea numerelor complexe determină o structură de corp comutativ.

**E5.** Să se arate că mulțimea M împreună cu operațiile algebrice date determină o structură de corp comutativ, dacă:

a) $M = \mathbb{R}$, $x \perp y \overset{def}{=} \sqrt[5]{x^5 + y^5}$ și
$x \top y \overset{def}{=} x \cdot y$;

b) $M = (0, +\infty)$, $x \perp y \overset{def}{=} x \cdot y$ și
$x \top y \overset{def}{=} x^{\ln y}$.

## APROFUNDARE

**A1.** Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$. Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se definesc operațiile algebrice:
$x \perp y \overset{def}{=} ax + by - 2$ și
$x \top y \overset{def}{=} xy - 2x - 2y + c$.
Să se determine a, b, c pentru care $(\mathbb{R}, \perp, \top)$ este corp comutativ.

**A2.** Să se arate că adunarea și înmulțirea numerelor complexe determină pe mulțimea M o structură de corp, dacă:

a) $M = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$;

b) $M = \mathbb{Q}(i) = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$;

c) $M = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \{a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Q}\}$.

**A3.** Fie $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_a = \begin{cases} ax, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$.
Să se arate că adunarea și compunerea funcțiilor determină pe mulțimea $F = \{f_a \mid a \in \mathbb{Q}\}$ o structură de corp comutativ.

**A4.** Fie $K = \{0, 1, a, b\}$ un corp cu patru elemente. Să se arate că:

a) $ab = ba = 1$;

b) $a^2 = b$;

c) $a^3 = 1$;

d) $a^2 + a + 1 = 0$;

e) $1 + 1 = 0$.

Să se scrie tabla lui Cayley pentru operațiile corpului K.

# 4 Morfisme de inele și corpuri

Fie $(A, \circ, *)$ și $(B, \perp, \top)$ două inele.

## ❖ DEFINIȚII

• O funcție $f : A \to B$ se numește **morfism de inele**, dacă:
**a)** $f(x \circ y) = f(x) \perp f(y), \forall x, y \in A$;
**b)** $f(x * y) = f(x) \top f(y), \forall x, y \in A$;
**c)** $f(1_A) = 1_B$.
• Funcția $f : A \to B$ se numește **izomorfism** de inele dacă este morfism de inele și este funcție bijectivă.
• Inelele A și B se numesc **inele izomorfe** dacă există un izomorfism $f : A \to B$.

Păstrând notațiile uzuale „$+$“ și „$\cdot$“ pentru legile de compoziție ale unui inel, funcția $f : A \to B$ este **morfism de inele** dacă:

• $f(x + y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in A$;
• $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y), \forall x, y \in A$.
• $f(1_A) = 1_B$.

Un morfism de inele $f : A \to B$ este în particular un morfism de grupuri. Rezultă că f are proprietățile:
**a)** $f(0_A) = 0_B$;
**b)** $f(-x) = -f(x), \forall x \in A$;
**c)** $f(nx) = n \cdot f(x), \forall x \in A$ și $n \in \mathbb{Z}$.

☞ ***Exemple de morfisme de inele***

◆ Fie $(A, +, \cdot)$ un inel. Funcția identică $f : A \to A, f(x) = x$ este morfism (izomorfism) de inele.
Un morfism de inele $f : A \to A$ se numește **endomorfism** al inelului A. Mulțimea endomorfismelor inelului A se notează $\text{End}(A)$. Un izomorfism de inele $f : A \to A$ se numește **automorfism** al inelului A. Mulțimea automorfismelor inelului A se notează $\text{Aut}(A)$.

◆ Funcția $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$, $f(x) = \hat{x}$ este morfism de la inelul $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ la inelul $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$, numit **morfism canonic.**

## ➲ OBSERVAȚII

**1.** Dacă inelele $(A, +, \cdot)$ și $(B, +, \cdot)$ sunt inele izomorfe, atunci grupurile $(A, +)$ și $(B, +)$ sunt izomorfe. Orice izomorfism $f : A \to B$ de inele este în particular izomorfism al grupurilor $(A, +)$ și $(B, +)$. Reciproca este adevărată?

**2.** Dacă $(M, +, \cdot)$ și $(A, +, \cdot)$ sunt inele și $M \subset A$, iar $f : A \to A$ este automorfism al lui A, atunci restricția lui f la M este automorfism al lui M.

## ❖ DEFINIȚIE

Fie $(K, +, \cdot)$ și $(K', +, \cdot)$ două corpuri.

• Funcția $f : K \to K'$ se numește **morfism (izomorfism) de corpuri** dacă f este morfism (izomorfism) de inele de la K la $K'$.

☞ ***Exemple***

- Funcția $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(z) = \bar{z}$ este automorfism al corpului $(\mathbb{C}, +, \cdot)$.
- Funcția $f : \mathbb{Q}(\sqrt{5}) \to \mathbb{Q}(\sqrt{5}), f(a + b\sqrt{5}) = a - b\sqrt{5}$ este automorfism al corpului $(\mathbb{Q}(\sqrt{5}), +, \cdot)$.

## *Problemă rezolvată*

☒ Fie $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{Q} \right\} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$. Să se arate că funcția $f : \mathbb{Q}(\sqrt{3}) \to \mathcal{M}_2, f(a + b\sqrt{3}) = \begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix}$ este izomorfism de la corpul $(\mathbb{Q}(\sqrt{3}), +, \cdot)$ la corpul $(M, +, \cdot)$.

<u>*Soluție*</u>

Fie $A = \begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} x & 3y \\ y & x \end{pmatrix}, A, B \in M$.

Se obține: $A + B = \begin{pmatrix} a + x & 3b + 3y \\ b + y & a + x \end{pmatrix}$ și $AB = \begin{pmatrix} ax + 3by & 3ay + 3bx \\ ay + bx & ax + 3by \end{pmatrix}$.

Dacă $u = a + b\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3}), v = x + y\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3})$, avem:

$$f(u + v) = f(a + x + (b + y)\sqrt{3}) = \begin{pmatrix} a + x & 3b + 3y \\ b + y & a + x \end{pmatrix} = A + B = f(u) + f(v).$$

Analog se obține:

$$f(uv) = f\left(ax+3by+(ay+bx)\sqrt{3}\right) = \begin{pmatrix} ax+3by & 3ay+3bx \\ ay+bx & ax+3by \end{pmatrix} = A\cdot B =$$

$= f(u)\cdot f(v).$

Având $f\left(1+0\sqrt{3}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 3\cdot 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$, rezultă că f este morfism de corpuri. Se verifică ușor că f este funcție bijectivă. În concluzie, f este izomorfism de corpuri.

**▣ TEOREMA 9**

Fie $(K, +, \cdot)$, $(K', +, \cdot)$, $(K'', +, \cdot)$ inele (corpuri) și $f : K \to K'$, $g : K' \to K''$ morfisme (izomorfisme) de inele (corpuri).

Atunci $g \circ f : K \to K''$ este morfism (izomorfism) de inele (corpuri).

*Demonstrație*

Deoarece $(K, +)$, $(K', +)$, $(K'', +)$ sunt grupuri, atunci funcțiile f și g sunt morfisme de grupuri, deci și $g \circ f$ este morfism de grupuri.

Rezultă că: $(g\circ f)(x+y) = (g\circ f)(x) + (g\circ f)(y)$, $\forall$ x, $y \in K$.

În mod analog, rezultă că $g \circ f$ este morfism (izomorfism) între grupurile $\left(K^*, \cdot\right)$ și $\left(K'' \setminus \{0\}, \cdot\right)$.

Rezultă că: $(g\circ f)(xy) = (g\circ f)(x)\cdot(g\circ f)(y)$, $\forall$ x, $y \in K$.

De asemenea, $(g\circ f)(1) = g\left(f(1)\right) = g(1) = 1$.

În concluzie, $g \circ f$ este morfism (izomorfism) de inele (corpuri). ■

**▣ TEOREMA 10**

Orice morfism de corpuri este funcție injectivă.

*Demonstrație*

Fie $(K, +, \cdot)$, $(K', +, \cdot)$ două corpuri, $f : K \to K'$ un morfism de corpuri, și x, $y \in K$, astfel încât $f(x) = f(y)$. Dacă presupunem prin reducere la absurd că $x \neq y$, rezultă că $x - y \neq 0$. Atunci $x - y \in \mathcal{U}(K)$ și există $a \in \mathcal{U}(K)$ astfel încât $a(x-y) = 1$. Se obține succesiv: $1 = f(1) =$ $= f\left(a(x-y)\right) = f(a)\cdot f(x-y) = f(a)\cdot\left[f(x)-f(y)\right] = 0$, în contradicție cu $1 \neq 0$. Această contradicție arată că $x = y$ și astfel f este funcție injectivă. ■

## *Probleme rezolvate*

☒ **1.** Să se determine automorfismele corpurilor $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}_p$.

<u>Soluție</u>

**a)** Fie $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ un automorfism de corpuri. Rezultă că f este automorfism al grupului $(\mathbb{Q}, +)$, deci $f(x)=x\cdot f(1),\ \forall\ x\in\mathbb{Q}$. Deoarece $f(1)=1$ se obține că $f(x)=x,\ \forall x\in\mathbb{Q}$, este singurul automorfism al corpului $\mathbb{Q}$.

**b)** Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ un automorfism al corpului $\mathbb{R}$. Vom arăta că $f(x)=x,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Pentru aceasta vom parcurge următoarele etape:

1. Se arată că $f(x)=x,\ \forall x\in\mathbb{Q}$.
2. Se arată că f este monoton crescătoare pe $\mathbb{R}$.
3. Se arată că f este funcția identică.

**1.** Funcția f fiind automorfism al grupului $(\mathbb{R}, +)$, este automorfism și al grupului $(\mathbb{Q}, +)$ și rezultă imediat că $f(x)=x,\ \forall x\in\mathbb{Q}$.

**2.** Arătăm mai întâi că pentru $x>0$ rezultă $f(x)>0$.

Într-adevăr, din relația $f(x\cdot y)=f(x)\cdot f(y),\ \forall\ x, y\in\mathbb{R}$, pentru $x>0$ se obține:

$$f(x)=f\left(\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}\right)=\left(f\left(\sqrt{x}\right)\right)^2>0.$$

Fie acum $x<y$. Rezultă că $z=y-x>0$, și avem $0<f(z)=f(y-x)=$ $=f(y)-f(x)$, deci $f(x)<f(y)$.

Așadar, f este funcție strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

**3.** Să arătăm că $f(x)=x,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Să presupunem că există $x_0\in\mathbb{R}$, astfel încât $f(x_0)\neq x_0$.

Fie, de exemplu, $f(x_0)<x_0$. Considerăm $r\in\mathbb{Q}$, astfel încât $f(x_0)<r<x_0$. (1)

Din monotonia funcției f rezultă că $f(r)<f(x_0)$.

Dar $f(r)=r$ și se obține $r<f(x_0)$, în contradicție cu relația (1).

Analog se arată că nu putem avea $f(x_0)>x_0$.

În concluzie, $f(x)=x,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

**c)** Fie $f:\mathbb{Z}_p\to\mathbb{Z}_p$ un automorfism. Rezultă că $f(x+y)=f(x)+f(y)$, $\forall\ x, y\in\mathbb{Z}_p$.

Pentru $x = y = \hat{0}$ se obține $f(\hat{0}) = \hat{0}$.

Pentru $\hat{a} \in \mathbb{Z}_p \setminus \{0\}$, avem $\hat{a} = \underbrace{\hat{1} + \hat{1} + \ldots + \hat{1}}_{a-ori}$ și rezultă:

$$f(\hat{a}) = f(\hat{1} + \hat{1} + \ldots + \hat{1}) = \underbrace{f(\hat{1}) + f(\hat{1}) + \ldots + f(\hat{1})}_{a-ori} = a \cdot f(\hat{1}) = \hat{a} \cdot 1 = \hat{a}.$$

Așadar, singurul automorfism al corpului $\mathbb{Z}_p$ este cel identic.

☒ **2.** Să se determine automorfismele corpului $\mathbb{C}$, $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ cu proprietatea $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$.

*Soluție*

Fie $z = a + bi \in \mathbb{C}$ și $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ un automorfism al corpului $\mathbb{C}$.
Rezultă: $f(z) = f(a + bi) = f(a) + f(bi) = f(a) + f(b) \cdot f(i) = a + bf(i)$.

Așadar, automorfismul f este bine determinat de elementul $f(i)$.

Avem: $f(i) \cdot f(i) = f(i^2) = f(-1) = -1$, de unde se obține că $f(i) = \pm i$.

În concluzie, automorfismele lui $\mathbb{C}$ verifică relațiile $f(a + bi) = a + bi$ și $f(a + bi) = a - bi$, deci acestea sunt $f(z) = z$ și $f(z) = \bar{z}, \ \forall z \in \mathbb{C}$.

# EXERCIȚII ȘI PROBLEME

## EXERSARE

**E1.** **Pe mulțimea $\mathbb{Z}$ se definesc operațiile algebrice $x \perp y = x + y + 6$, $x \top y = xy + 6x + 6y + 30$, $x, y \in \mathbb{Z}$. Să se studieze dacă $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = x - 6$ este morfism între inelele $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ și $(\mathbb{Z}, \perp, \top)$. Este f izomorfism?**

**E2.** **Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se definesc operațiile algebrice $x \perp y = x + y - 1$, $x \top y = 2xy - 2x - 2y + 3$, $x, y \in \mathbb{R}$. Să se arate că funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{2} + 1$ este izomorfism între corpurile $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ și $(\mathbb{R}, \perp, \top)$.**

**E3.** **Pe mulțimea $\mathbb{Q}$ se definesc operațiile algebrice $x \perp y = x + y - \frac{1}{3}$, $x \top y = 4xy - \frac{4}{3}(x + y) + \frac{7}{9}$, $x, y \in \mathbb{Q}$.**
**Dacă $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $f(x) = \frac{x}{4} + \frac{1}{3}$, să se arate că:**
**a) $f_{/\mathbb{Z}}$ este morfism între inelele $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ și $(\mathbb{Q}, \perp, \top)$;**
**b) f este izomorfism între corpurile $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ și $(\mathbb{Q}, \perp, \top)$.**

**E4.** **Se consideră mulțimile de matrice:**
$$\mathcal{M}_1 = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & 8b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| \ a, b \in \mathbb{Q} \right\},$$
$$\mathcal{M}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 8b & a \end{pmatrix} \middle| \ a, b \in \mathbb{Q} \right\}.$$
**Să se arate că inelele (corpurile) $(\mathcal{M}_1, +, \cdot)$ și $(\mathcal{M}_2, +, \cdot)$ sunt izomorfe.**

**E5.** Fie $\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ ia & a \end{pmatrix} \middle| \, a \in \mathbb{C} \right\}$. Să se arate că $(\mathcal{M}, +, \cdot)$ este corp comutativ izomorf cu corpul $(\mathbb{C}, +, \cdot)$.

**E6.** Pe mulțimea $\mathbb{Z}_5$ se definesc operațiile algebrice $x \perp y = x + y + \hat{1}$, $x \top y = xy + x + y$, $x, y \in \mathbb{Z}_5$.
a) Să se alcătuiască tabla operațiilor „ $\perp$ “ și „ $\top$ “.
b) Să se arate că $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot) \simeq (\mathbb{Z}_5, \perp, \top)$.
c) Care dintre funcțiile $f_a : \mathbb{Z}_5 \to \mathbb{Z}_5$, $f_a(x) = x + a$, este morfism (izomorfism) între $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$ și $(\mathbb{Z}_5, \perp, \top)$?

## APROFUNDARE

**A1.** Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se consideră operațiile algebrice $x \perp y = x + y - 2$, $x \top y = \frac{1}{4}xy - \frac{1}{2}(x+y) + 3$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$. Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$ să fie izomorfism între inelele (corpurile) $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ și $(\mathbb{R}, \perp, \top)$.

**A2.** Se consideră $d \in \mathbb{N}^*$ și mulțimea $\mathcal{M}_d = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ db & a \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{Z} \right\} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$.
Să se arate că:
a) $(\mathcal{M}_d, +, \cdot)$ este inel comutativ;
b) inelul $\mathcal{M}_d$ are divizori ai lui zero dacă și numai dacă d este pătrat perfect;
c) dacă d nu este pătrat perfect, să se arate că inelele $(\mathcal{M}_d, +, \cdot)$ și $(\mathbb{Z}(\sqrt{d}), +, \cdot)$ sunt izomorfe.

**A3.** Să se arate că inelele $(\mathbb{Z}(\sqrt{2}), +, \cdot)$ și $(\mathbb{Z}(\sqrt{3}), +, \cdot)$ nu sunt izomorfe. Generalizare.

**A4.** Să se arate că următoarele inele (corpuri) nu sunt izomorfe:
a) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ și $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$;
b) $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ și $(\mathbb{R}, +, \cdot)$;
c) $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ și $(\mathbb{Q}(\sqrt{5}), +, \cdot)$;
d) $(\mathbb{Q}(\sqrt{2}), +, \cdot)$ și $(\mathbb{Q}(\sqrt{3}), +, \cdot)$.

**A5.** Fie $(A, +, \cdot)$ un inel și $End(A)$ mulțimea endomorfismelor de inel ale lui A. Să se arate că $(End(A), +, \circ)$ este inel („$\circ$“ reprezintă compunerea funcțiilor).

**A6.** Să se determine:
$End(\mathbb{Z})$, $End(\mathbb{Q})$, $End(\mathbb{Z}_4)$, $End(\mathbb{Z}_2)$.

**A7.** Să se determine morfismele de inele între:
a) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ și $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$;
b) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ și $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$;
c) $(\mathbb{Z}_2, +, \cdot)$ și $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$;
d) $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$ și $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$.

**A8.** Fie $d_1, d_2 \in \mathbb{N}^*$ numere naturale libere de pătrate. Să se arate că inelele (corpurile) $\mathbb{Q}(\sqrt{d_1})$ și $\mathbb{Q}(\sqrt{d_2})$ sunt izomorfe dacă și numai dacă $d_1 = d_2$.

## DEZVOLTARE

**D1.** Fie $(A, +, \cdot)$ un inel în care $x^2 = 1$, $\forall\ x \in A \setminus \{0\}$. Să se arate că A este izomorf cu inelul $\mathbb{Z}_2$ sau $\mathbb{Z}_3$.

**D2.** Fie $(A, +, \cdot)$ un inel în care $x^4 = 1$, $\forall\ x \in A \setminus \{0\}$. Să se arate că A este izomorf cu unul dintre inelele $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_3$ sau $\mathbb{Z}_5$.

## TESTE DE EVALUARE

### Testul 1

❍**1.** Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se consideră operațiile algebrice:

**Grupa 1**

$x \perp y = x + y - 5$

$x \top y = 3xy - 15x - 15y + 80$,

$\forall\ x, y \in \mathbb{R}$.

**Grupa 2**

$x \perp y = x + y + 2$,

$x \top y = xy + 2x + 2y + 2$,

$\forall\ x, y \in \mathbb{R}$.

Să se studieze:

a) ce structuri algebrice reprezintă $(\mathbb{R}, \perp)$ și $(\mathbb{R}, \top)$;

b) dacă operația „ $\perp$ " este distributivă în raport cu „ $\top$ ";

c) dacă $(\mathbb{R}, \perp, \top)$ este inel fără divizori ai lui zero.

*(5 puncte)*

❍**2.** Să se rezolve în $\mathbb{Z}_4$:

**Grupa 1**

a) $\hat{2}x^3 + \hat{2}x = \hat{0}$;

b) $\begin{cases} \hat{2}x + \hat{3}y = \hat{1} \\ \hat{3}x + \hat{2}y = \hat{2} \end{cases}$.

**Grupa 2**

a) $\hat{3}x^2 + \hat{3}x = \hat{0}$;

b) $\begin{cases} \hat{2}x + y = \hat{3} \\ \hat{3}x + \hat{3}y = \hat{2} \end{cases}$.

*(4 puncte)*

### Testul 2

❍**1.** Pe mulțimea $\mathbb{Z}$ se consideră operațiile:

$x \perp y = x + y + a$, $x \top y = xy + bx + 3y + c$, $x, y \in \mathbb{Z}$.

a) Să se determine $a, b, c \in \mathbb{Z}$ pentru care au loc relațiile: $(2 \perp 3) \top 1 = 41$, $(2 \perp 1) \top 3 = 51$ și $1 \top (2 \perp 3) = (1 \top 2) \perp (1 \top 3)$.

b) Pentru valorile lui a, b, c găsite, să se precizeze dacă $(\mathbb{Z}, \perp, \top)$ este inel, să se afle $\mathcal{U}(\mathbb{Z})$ și mulțimea divizorilor lui zero.

*(5 puncte)*

❍**2.** a) Să se determine $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 8$, astfel încât în inelul $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ inversul elementului $\hat{3}$ să fie $\hat{7}$.

b) Pentru valorile lui n găsite să se determine $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_n)$.

*(4 puncte)*

# Testul 3

**○1. Pe mulțimea $E = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ se introduc legile de compoziție:**

$(a, b) + (x, y) = (a + x, b + y)$;

$(a, b) \cdot (x, y) = (ax, ay + bx)$.

**a) Să se arate că $(E, +, \cdot)$ este inel comutativ. Este acesta corp?**

**b) Să se arate că aplicația $f : E \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $f(x, y) = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}$, este morfism între inelele $(E, +, \cdot)$ și $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$.**

*(6 puncte)*
*(Univ. București)*

**○2. Fie $A = \{0, 1, a, b\}$ un inel cu patru elemente. Să se arate că:**

**a) funcția $f : A \to A$, $f(x) = 1 + x$ este bijectivă;**

**b) $\sum_{x \in A} f(x) = 1 + a + b$ și $1 + 1 + 1 + 1 = 0$.**

**c) dacă A este corp, atunci $1 + 1 = 0$.**

*(3 puncte)*
*(Univ. București, 1981)*

# Testul 4

**○1. Pe mulțimea $\mathbb{C}$ definim operațiile algebrice:**

$z_1 \perp z_2 = z_1 + z_2$, $z_1 \top z_2 = z_1 \cdot z_2 + (\text{Im}\, z_1) \cdot (\text{Im}\, z_2)$, $\forall\ z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

**a) Să se arate că tripletul $(\mathbb{C}, \perp, \top)$ este inel.**

**b) Să se determine $\mathcal{U}(\mathbb{C})$.**

**c) Dacă $\mathcal{M} = \left\{ xI_2 + y\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, x, y \in \mathbb{R} \right\}$ să se arate că $(\mathcal{M}, +, \cdot)$ formează inel.**

**d) Să se arate că $f : \mathbb{C} \to \mathcal{M}$, $f(x + iy) = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}$, este izomorfism între inelele $(\mathbb{C}, \perp, \top)$ și $(\mathcal{M}, +, \cdot)$.**

*(6 puncte)*

**○2. Fie $(A, +, \cdot)$ un inel cu proprietatea că $x^2 = x$, $\forall\ x \in A$. Să se arate că:**

**a) $1 + 1 = 0$;**
**b) inelul este comutativ;**
**c) dacă A este corp, atunci $A \simeq \mathbb{Z}_2$.**

*(3 puncte)*

# III. INELE DE POLINOAME



## Mulțimea polinoamelor cu coeficienți într-un corp comutativ

În acest capitol se va considera un corp comutativ $(K, +, \cdot)$, unde K reprezintă una dintre mulțimile $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ sau $\mathbb{Z}_p$, p număr prim.

### 1.1. Șiruri de elemente din corpul K

❖ **DEFINIȚII**

- Se numește **șir de elemente** din corpul K o funcție $f : \mathbb{N} \to K$.
- Elementul $a_n = f(n) \in K$ reprezintă **termenul general** al șirului.

Ordinea de scriere a numerelor naturale induce ordinea de scriere a termenilor șirului și anume: $a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ...$ .

Pentru un șir de elemente din corpul K se va folosi notația $f = (a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ...)$ sau $f = \{a_n\}$.

Două șiruri $f = (a_0, a_1, ..., a_n, ...)$ și $g = (b_0, b_1, ..., b_n, ...)$ sunt egale dacă $a_0 = b_0, a_1 = b_1, a_2 = b_2, ..., a_n = b_n, ...$ .

❖ **DEFINIȚIE**

- Un șir $f = (a_0, a_1, ..., a_n, ...)$ se numește **șir finit** dacă există un număr natural p, astfel încât $a_m = 0$, oricare ar fi $m > p$.

Așadar, un șir este finit dacă are un număr finit de termeni nenuli.

☞ ***Exemplu***

- $f_1 = (1, 0, 0, ..., 0, ...), f_2 = (9, 0, 0, 5, 0, 0, ..., 0, ...)$, $f_1, f_2$ cu elemente din $\mathbb{R}$.

### 1.2. Operații cu șiruri de elemente din corpul K

Notăm cu $K^{\mathbb{N}}$ mulțimea șirurilor de elemente din corpul K și cu $K^{(\mathbb{N})}$ mulțimea șirurilor finite cu elemente din K. Se observă că are loc incluziunea $K^{(\mathbb{N})} \subset K^{\mathbb{N}}$.

## ❖ DEFINIȚII

Fie $f, g \in K^{\mathbb{N}}$, $f = (a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ...)$, $g = (b_0, b_1, b_2, ..., b_n)$ două șiruri.

- Șirul $h \in K^{\mathbb{N}}$, $h = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, ..., a_n + b_n, ...)$ se numește **suma** șirurilor f și g. Se notează $h = f + g$.
- Șirul $h \in K^{\mathbb{N}}$, $h = (c_0, c_1, ..., c_n, ...)$, unde pentru oricare $m \in \mathbb{N}$ avem $c_m = a_0 b_m + a_1 b_{m-1} + ... + a_m b_0 = \sum_{k=0}^{m} a_k \cdot b_{m-k}$ se numește **produsul** șirurilor f și g. Se notează $h = f \cdot g$.

☞ ***Exemplu***

- Fie $K = \mathbb{C}$ și $f = (1, 1, 2, 3, -1, 0, 0, ...)$, $g = (0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, ...)$.

  Atunci $f + g = (1, 2, 3, 3, -1, 1, 0, 0, ...)$, $f \cdot g = (0, 1, 2, 3, 5, 3, 0, 2, 3, -1, 0, 0, ...)$.

### ▣ TEOREMA 1

Mulțimea $K^{(\mathbb{N})}$ a șirurilor finite este parte stabilă a mulțimii $K^{\mathbb{N}}$ în raport cu operațiile de adunare și înmulțire a șirurilor.

*Demonstrație*

Fie $f, g \in K^{(\mathbb{N})}$, $f = (a_0, a_1, a_2, ..., a_m, 0, 0, ...)$, $g = (b_0, b_1, ..., b_n, 0, 0, ...)$ astfel încât $a_m, b_n \in K \setminus \{0\}$.

**a)** Dacă $p > \max(m, n)$, avem $a_p + b_p = 0$ și astfel:

$f + g = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, ..., a_{p-1} + b_{p-1}, 0, 0, ...) \in K^{(\mathbb{N})}$.

**b)** Fie $p > m + n$ și $f \cdot g = (c_0, c_1, c_2, c_3, c_4, ...)$.

Rezultă $c_p = \sum_{k=0}^{m} a_k \cdot \underline{b_{p-k}} + \sum_{k=m+1}^{p} \underline{a_k} \cdot b_{p-k}$. În fiecare sumă factorii subliniați sunt nuli, deoarece $a_{m+1} = a_{m+2} = ... = a_p = 0$ și $b_{p-m} = b_{p-m-1} = ... = b_p = 0$. Rezultă că elementul $c_p = 0$.

Așadar, $f \cdot g = (c_0, c_1, ..., c_{p-1}, 0, 0, ...) \in K^{(\mathbb{N})}$. ■

## ➲ OBSERVAȚIE

- Dacă $p = m + n$ și $a_m, b_n \in K^*$, atunci $c_{m+n} = a_m \cdot b_n \in K^*$. Așadar, $m + n$ este rangul cel mai mare pentru care elementul $c_p$ este nenul.

## ❖ DEFINIȚII

- Orice element al mulțimii $K^{(\mathbb{N})}$ pe care s-a definit adunarea și înmulțirea de șiruri se numește **polinom cu coeficienți în corpul K**.
- Dacă $f \in K^{(\mathbb{N})}$, $f = (a_0, a_1, a_2, ..., a_n, 0, 0, ...)$, unde $a_n \in K^*$, elementele $a_0, a_1, ..., a_n$ se numesc **coeficienții** polinomului f, iar $n \in \mathbb{N}$ se numește **gradul** polinomului f și se notează $n = \text{grad}(f)$.
- Coeficientul $a_n \in K^*$ al polinomului f se numește **coeficient dominant**. Dacă coeficientul dominant este egal cu 1, polinomul se numește polinom **unitar** sau **monic**.
- Polinomul $f = (0, 0, 0, ..., 0, ...)$ cu toți coeficienții zero se numește **polinom nul**. Polinomului nul i se atribuie gradul $-\infty$.

### ▣ TEOREMA 2

Tripletul $\left(K^{(\mathbb{N})}, +, \cdot\right)$ formează un inel comutativ fără divizori ai lui zero (inel integru).

*Demonstrație*

Verificarea axiomelor de inel este lăsată drept temă. Elementul neutru în raport cu adunarea este polinomul nul $e = (0,0,...)$, iar față de înmulțire este polinomul $f = (1,0,0,...)$.

Să arătăm că inelul este integru.

Fie $f, g \in K^{(\mathbb{N})}$ polinoame nenule, $f = (a_0, a_1, ..., a_n, 0, 0, ...)$, $g = (b_0, b_1, ..., b_m, 0, 0)$, $\text{grad}(f) = n, \text{grad}(g) = m$.

Notăm $f \cdot g = (c_0, c_1, c_2, ...)$ produsul polinoamelor f și g. Numărul $c_{m+n} = a_n \cdot b_m$ este element nenul în corpul K, deci $f \cdot g$ este polinom nenul. Așadar inelul este inel integru. ■

### ➲ OBSERVAȚIE

- Pentru $p > m + n$ avem $c_p = 0$.

Rezultă că: $\text{grad}(f \cdot g) = m + n = \text{grad}(f) + \text{grad}(g)$.

**❑ REȚINEM!**
$\text{grad}(f \cdot g) = \text{grad}(f) + \text{grad}(g)$.

**❑ TEMĂ**

**Să se determine suma și produsul polinoamelor:**

**a)** $f = (1, 2, -1, 3, 0, 0, ...)$, $g = (-1, -2, 1, 1, 0, 0, ...)$, $f, g \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$;

**b)** $f = (-1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, ...)$, $g = (1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, ...)$, $f, g \in \mathbb{Q}^{(\mathbb{N})}$;

**c)** $f = (\hat{1}, \hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{0}, \hat{0}, ...)$, $g = (\hat{2}, \hat{0}, \hat{2}, \hat{1}, \hat{0}, \hat{0}, \hat{0}, ...)$, $f, g \in \mathbb{Z}_3^{(\mathbb{N})}$.

# 2 Forma algebrică a polinoamelor

## 2.1. Polinoame constante

Să considerăm mulțimea $K_1^{(\mathbb{N})}$ a polinoamelor de forma:

$f=(a,\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ \ldots),\ a\in K.$

Dacă $f=(a,\ 0,\ 0,\ \ldots),\ g=(b,\ 0,\ 0,\ \ldots),\ a,\ b\in K,$ atunci:

$f+g=(a+b,\ 0,\ 0,\ \ldots)$ iar $f\cdot g=(ab,\ 0,\ 0,\ \ldots).$

Rezultă că mulțimea $K_1^{(\mathbb{N})}$ este parte stabilă a mulțimii $K^{(\mathbb{N})}$ în raport cu operațiile de adunare și de înmulțire a polinoamelor.

Mai mult, funcția $F:K_1^{(\mathbb{N})}\to K,\ F(f)=a,$ unde $f=(a,\ 0,\ 0,\ \ldots)$ este bijectivă și verifică egalitățile: $F(f+g)=F(f)+F(g)$ și $F(f\cdot g)=F(f)\cdot F(g).$

Aceste proprietăți ne permit să identificăm polinoamele de forma $f=(a,\ 0,\ 0,\ \ldots)$ cu elementul $a\in K.$ În acest mod mulțimea $K_1^{(\mathbb{N})}$ se identifică cu mulțimea K.

Polinoamele de forma $f=(a,\ 0,\ 0,\ \ldots)$ le vom numi **polinoame constante**.

Dacă $x\in K$ și $f=(a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_n,\ 0,\ 0,\ \ldots)\in K^{(\mathbb{N})},$ atunci:

$x\cdot f=(x,\ 0,\ 0,\ \ldots)\cdot(a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_n,\ 0,\ 0,\ \ldots)=(xa_0,\ xa_1,\ \ldots,\ xa_n,\ 0,\ 0,\ \ldots),$ (1).

Relația (1) exprimă regula de înmulțire a unui polinom cu un element din corpul K și anume:

Un polinom se înmulțește cu un element din K înmulțind fiecare coeficient al polinomului cu acest element.

## 2.2. Forma algebrică a unui monom

❖ **DEFINIȚIE**

• Un polinom $f\in K^{(\mathbb{N})}$ se numește **monom** dacă are un singur coeficient nenul.

☞ ***Exemple***

- $f=(0,\ 0,\ 2,\ 0,\ 0,\ \ldots),\ g=(1,\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ \ldots),\ h=(0,\ 1,\ 0,\ 0,\ \ldots).$

Un rol important în scrierea unui polinom îl are monomul $X=(0,\ 1,\ 0,\ 0,\ \ldots)$ care se citește „nedeterminată X".

Definim puterile nedeterminatei X în mod recurent:
$X^2 = X \cdot X,\ X^n = X^{n-1} \cdot X,\ n \geq 2.$
Se obține:
$X^2 = (0, 0, 1, 0, 0, ...)$
$X^3 = (0, 0, 0, 1, 0, 0, ...)$
.................................
$X^n = (\underbrace{0, 0, ..., 0}_{n\ zerouri}, 1, 0, 0, ...)$

Se observă că $X^2, X^3, ..., X^n, ...$ reprezintă monoame.
Pentru monomul $f_k = (\underbrace{0, 0, ..., 0}_{k\ zerouri}, a_k, 0, ...),\ a_k \in K^*$, avem scrierea:

$$f_k = a_k \cdot (\underbrace{0, 0, ..., 0}_{k\ zerouri}, 1, 0, ...) = a_k X^k.$$

Așadar $f_k = a_k \cdot X^k$, relație care reprezintă **forma algebrică** a monomului $f_k$.
Numărul $k \in \mathbb{N}$ reprezintă **gradul monomului** $f_k$. Două monoame se numesc **asemenea** dacă au același grad.

## 2.3. Forma algebrică a unui polinom

Fie $f \in K^{(\mathbb{N})},\ f = (a_0, a_1, ..., a_n, 0, 0, ...),\ a_n \in K^*$ un polinom de gradul n.
Folosind operațiile cu polinoame avem:

$$f = (a_0, 0, 0, ...) + (0, a_1, 0, 0, ...) + (0, 0, a_2, 0, 0, ...) + ... +$$
$$+ \left(\underbrace{0, 0, ..., 0}_{n\ zerouri}, a_n, 0, 0, ...\right) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + ... + a_nX^n.$$

Așadar, $f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + ... + a_nX^n$, scriere care reprezintă forma algebrică a polinoamelor de gradul n în nedeterminata X.
Rezultă că polinomul f este o sumă de monoame.
Monomul „$a_nX^n$" se numește **monomul dominant** al polinomului f.
Scrierea unui polinom sub formă algebrică este unică, abstracție făcând de ordinea de scriere a monoamelor.

Fie $f, g \in K^{(\mathbb{N})}$, $f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \ldots + a_nX^n$, $g = b_0 + b_1X + b_2X^2 + \ldots + b_mX^m$, $\text{grad}(f) = n$ și $\text{grad}(g) = m$. **Polinoamele f și g sunt egale** și scriem $f = g$, dacă au același grad și coeficienții respectiv egali: $m = n$ și $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, ... $a_n = b_n$. În particular, polinomul f este egal cu polinomul nul dacă toți coeficienții săi sunt nuli.

Pentru mulțimea $K^{(\mathbb{N})}$ se va adopta notația $K[X]$ pentru a pune în evidență nedeterminata X.

În particular, avem mulțimile de polinoame $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$, $\mathbb{Z}_p[X]$, adică mulțimile de polinoame în nedeterminata X cu coeficienți în corpurile $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, respectiv $\mathbb{Z}_p$.

Se observă că există incluziunile $\mathbb{Q}[X] \subset \mathbb{R}[X] \subset \mathbb{C}[X]$.

## 2.4. Valoarea unui polinom. Funcții polinomiale

Fie $f \in K[X]$, $f = a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n$, $a_n \in K^*$ un polinom de gradul n.

### ❖ DEFINIȚIE

- Dacă $x \in K$, elementul $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n \in K$ se numește **valoarea polinomului f în x**.

☞ ***Exemple***

- Fie $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = 1 + X + X^2$ și $x \in \{-1, 0, 1\}$.
  Atunci $f(-1) = 1 - 1 + 1 = 1$, $f(0) = 1 + 0 + 0^2 = 1$, $f(1) = 1 + 1 + 1 = 3$.
- Fie $f \in \mathbb{C}[X]$, $f = 2 + X^2 + X^4$ și $x \in \{i, i\sqrt{3}\}$.
  Atunci $f(i) = 2 - 1 + 1 = 2$, $f(i\sqrt{3}) = 2 - 3 + 9 = 8$.
- Fie $f \in \mathbb{Z}_5[X]$, $f = \hat{2} + X + \hat{3}X^3$ și $x \in \{\hat{1}, \hat{0}, \hat{2}\}$.
  Atunci $f(\hat{1}) = \hat{2} + \hat{1} + \hat{3} = \hat{1}$, $f(\hat{0}) = \hat{2} + \hat{0} + \hat{0} = \hat{2}$, $f(\hat{2}) = \hat{2} + \hat{2} + \hat{3} \cdot \hat{3} = \hat{4} + \hat{4} = \hat{3}$.

### ➲ OBSERVAȚIE

Dacă $f, g \in K[X]$, atunci au loc egalitățile:

- $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, $\forall\ x \in K$;
- $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$, $\forall\ x \in K$;
- $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$, $\forall\ x \in K$.

❖ **DEFINIȚII**

- Fie $f \in K[X]$ un polinom nenul. Se numește **funcție polinomială** atașată polinomului f, funcția $\tilde{f} : K \to K$, $\tilde{f}(x) = f(x)$, $x \in K$.
- Funcția $f : K \to K$ se numește funcție polinomială dacă există un polinom $g \in K[X]$, astfel încât $f = \tilde{g}$.

☞ ***Exemple***

- Funcția $\tilde{f} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\tilde{f}(z) = az + b$, $a \in \mathbb{C}^*$ este funcție polinomială atașată polinomului de gradul 1, $f \in \mathbb{C}[X]$, $f = b + aX$.
- Funcția $\tilde{f} : \mathbb{Z}_5 \to \mathbb{Z}_5$, $\tilde{f}(x) = \hat{2}x^2 + \hat{3}x + \hat{2}$ este funcție polinomială atașată polinomului $f \in \mathbb{Z}_5[X]$, $f = \hat{2} + \hat{3}X + \hat{2}X^2$.

➲ **OBSERVAȚIE**

- Dacă $f \in K[X]$, atunci funcția polinomială $\tilde{f}$ atașată lui f este unică. Reciproca acestei afirmații nu este adevărată.

☞ ***Exemplu***

- Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și $f_n \in \mathbb{Z}_2[X]$, $f_n = X^n$. Atunci $\tilde{f}_n(\hat{0}) = \hat{0}$ și $\tilde{f}_n(\hat{1}) = \hat{1}$. Așadar, pentru oricare $n \in \mathbb{N}^*$ funcția $f : \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2$, $f(\hat{0}) = \hat{0}$, $f(\hat{1}) = \hat{1}$ este funcția atașată pentru fiecare polinom $f_n$.

În cazul în care nu există posibilitatea unei confuzii, se va nota cu f funcția atașată polinomului $f \in K[X]$.

# 3 Operații cu polinoame scrise sub formă algebrică

## 3.1. Adunarea și înmulțirea polinoamelor scrise sub formă algebrică

Fie $p \in \mathbb{N}$ și $f, g \in K[X]$ monoame de gradul p: $f = a_p X^p$, $g = b_p X^p$. Având în vedere modul de definire a adunării polinoamelor obținem: $(f + g) = (a_p + b_p) X^p$, (1).

Mai general, dacă $f, g \in K[X]$ sunt polinoame de gradul n, respectiv m:

$f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \ldots + a_nX^n$,

$g = b_0 + b_1X + b_2X^2 + ... + b_mX^m,$

polinomul sumă se va scrie sub forma:

$$f + g = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)X + (a_2 + b_2)X^2 + ... + (a_p + b_p)X^p + ..., \quad (2),$$

cu convenția că $a_i = 0$, pentru $i > n$ și $b_j = 0$, pentru $j > m$.

Relația (2) ne arată că suma a două polinoame se face adunând monoamele asemenea din cele două polinoame.

☞ ***Exemple***

- $f = 2 + X + 3X^2 + 6X^3$, $g = 1 - 2X + 2X^2 - X^3$.

  Avem $f + g = (2+1) + (1-2)X + (3+2)X^2 + (6-1)X^3 = 3 - X + 5X^2 + 5X^3$.
- $f = -1 + X - X^2$, $g = 1 + X + X^2 + X^3$.

  Avem $f + g = (-1+1) + (1+1)X + (-1+1)X^2 + (0+1)X^3 = 0 + 2X + 0 \cdot X^2 + 1 \cdot X^3 = 2X + X^3$.

Fie $f, g \in K[X]$, $f = a_p X^p$, $g = b_q X^q$ două monoame. Folosind definiția înmulțirii polinoamelor se obține: $f \cdot g = a_pb_q X^{p+q}$, (3), deci produsul a două monoame de gradul p, respectiv de gradul q este un monom de gradul $p + q$.

Analog, dacă $f, g \in K[X]$, $f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + ... + a_nX^n$, $g = b_0 + b_1X + b_2X^2 + ... + b_mX^m$ sunt polinoame de gradul n, respectiv m, vom obține, cu convenția că $a_i = 0$, pentru $i > n$ și $b_j = 0$ pentru $j > m$:

$$f \cdot g = a_0 \cdot b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)X + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)X^2 + ... + (a_0b_{m+n} + a_1b_{m+n-1} + ... + a_{m+n}b_0)X^{m+n}, \quad (4).$$

Produsul $f \cdot g$ este un polinom de gradul $m + n$. Relația (4), care dă forma algebrică a polinomului produs $f \cdot g$, poate fi ușor obținută dacă avem în vedere înmulțirea a două sume, scriind:

$f \cdot g = (a_0 + a_1X + a_2X^2 + ... + a_nX^n)(b_0 + b_1X + b_2X^2 + ... + b_mX^m)$ și efectuând calculele, având în vedere regulile de înmulțire a două paranteze și calculele cu sume și produse de monoame. De asemenea, se are în vedere că adunarea și înmulțirea polinoamelor sunt comutative.

☞ ***Exemple***

- $f = 1 + X + X^2$, $g = 1 - X$.

  Se obține: $f \cdot g = (1 + X + X^2)(1 - X) = 1 - X + X - X^2 + X^2 - X^3 = 1 - X^3$.
- $f = (1 + 2X + X^2)^2 = (1 + 2X + X^2)(1 + 2X + X^2) = 1 + 2X + X^2 + 2X + 4X^2 + 2X^3 + X^2 + 2X^3 + X^4 = 1 + 4X + 6X^2 + 4X^3 + X^4$.

## *Exercițiu rezolvat*

☒ Să se determine polinoamele $f, g \in \mathbb{C}[X]$ de gradul 1, care verifică egalitățile $(X+1)f+(X-1)g=2X^2-2$ și $\tilde{f}(2)=\tilde{g}(0)$.

<u>*Soluție*</u>

Fie $f=aX+b,\ g=cX+d,\ a, c\in\mathbb{C}^*$. Egalitatea dată se scrie:

$(X+1)(aX+b)+(X-1)(cX+d)=2X^2-2.$

După efectuarea înmulțirilor și adunării se obține:

$(a+c)X^2+(a+b+d-c)X+b-d=2X^2+0\cdot X-2.$

Egalitatea de polinoame conduce la egalitățile:

$a+c=2,\ a+b+d-c=0,\ b-d=-2.$

Rezultă că $c=2-a,\ b=-a,\ d=2-a,\ a=\alpha\in\mathbb{C}.$

Așadar, $f=\alpha X-\alpha,\ g=(2-\alpha)X+2-\alpha.$

Din condiția $\tilde{f}(2)=\tilde{g}(0)$ se obține $\alpha=1$ și $f=X-1,\ g=X+1.$

## EXERCIȚII ȘI PROBLEME

### EXERSARE

**E1. Să se scrie sub formă algebrică polinomul f și să se specifice gradul acestuia:**

**a)** $f=(1, 0, 1, 2, 3, -1, 0, 0, \dots)\in\mathbb{Q}[X]$;

**b)** $f=(0, 0, 0, 1, 2, -1, 0, 0, \dots)\in\mathbb{R}[X]$;

**c)** $f=(0, 1, 0, 1, 0, i, -i, 0, 0, \dots)\in\mathbb{C}[X]$;

**d)** $f=(\hat{1}, \hat{2}, -\hat{1}, \hat{0}, \hat{1}, \hat{0}, \hat{0}, \dots)\in\mathbb{Z}_5[X]$.

**E2. Să se determine în funcție de parametrul $m\in\mathbb{R}$, gradul polinomului $f\in\mathbb{R}[X]$:**

**a)** $f=m+(m-1)X$;

**b)** $f=2+(m^2-1)X+(m^2-3m+2)X^2$.

**E3. Să se determine gradul polinomului f, în cazurile:**

**a)** $f\in\mathbb{Q}[X],\ f=2+(m-1)X^2+(2m^2-3m+1)X^3$;

**b)** $f\in\mathbb{Z}_3[X],\ f=\hat{1}+mX+(m^2-m)X^2$;

**c)** $f\in\mathbb{Z}_5[X],\ f=(m^2+\hat{1})X^3+(m+\hat{3})X+\hat{2}$;

**d)** $f\in\mathbb{C}[X],\ f=m^2-1+2X+(m^2-3m+2)X^2+(m^2-4)X^3$;

**e)** $f\in\mathbb{C}[X],\ f=1+(m^2+1)X+mX^2+(m^3+m)X^3$.

**E4. Se consideră $f\in\mathbb{C}[X],\ f=1+X+X^2+X^3$. Să se calculeze:**

**a)** $f(1+i),\ f(1-i),\ f(1+i\sqrt{3}),\ \overline{f(1-i\sqrt{3})}$;

b) $f\left(1+\sqrt{2}\right)$, $f\left(1-\sqrt{2}\right)$, $f\left(3+2\sqrt{2}\right)$, $f\left(4+\sqrt{5}\right)$;

c) $f\left(\frac{1-i}{1+i}\right)+f\left(\frac{1+i}{1-i}\right)$.

**E5.** Să se determine $f \in \mathbb{C}[X]$, astfel încât:

a) $f = a + bX$, $f(i) = 1$, $f(1-i) = 1$;

b) $f = a + bX + cX^2$, $f(1) = f(i) = f(-i) + 1 = 0$.

**E6.** Să se efectueze suma polinoamelor $f, g \in \mathbb{C}[X]$:

a) $f = 1 + X + X^2 + X^3$, $g = 1 - X^2 - X^3 + X^4$;

b) $f = 1 + (1+i)X + (1-i)X^3$, $g = 1 + (1-i)X + (1+i)X^3$;

c) $f = 1 + 2iX + 3X^2$, $g = -1 + iX^2 + (1+i)X^3$.

**E7.** Să se efectueze suma polinoamelor $f, g \in \mathbb{Z}_p[X]$:

a) $f = \hat{1} + \hat{3}X + \hat{4}X^2$, $g = \hat{3} + \hat{2}X + X^2 + X^3$, $p = 5$;

b) $f = \hat{2} + \hat{2}X + X^3$, $g = \hat{5} + \hat{4}X + \hat{6}X^3 - X^4$, $p = 7$;

c) $f = \hat{1} + X + X^2 - X^3$, $g = \hat{1} + X - X^2 + X^3 - X^4$, $p = 2$.

**E8.** Să se efectueze produsul polinoamelor $f, g \in \mathbb{C}[X]$:

a) $f = X^2 + X + 1$, $g = X^2 - X + 1$;

b) $f = X - 1$, $g = X^2 + iX - 1$;

c) $f = 1 + X + X^2 + X^3$, $g = 1 - X$;

d) $f = (1+X)(2+X)(1-X)$, $g = (1-X)(2-X)$.

**E9.** Să se efectueze produsul polinoamelor $f, g \in \mathbb{Z}_p[X]$:

a) $f = \hat{1} + X$, $g = \hat{1} + X + X^2$, $p = 2$;

b) $f = \hat{2} + X + X^2$, $g = \hat{2} + \hat{2}X - X^2$, $p = 3$.

c) $f = \left(\hat{1} + \hat{2}X\right) \cdot X + X^2$, $g = \left(\hat{1} + \hat{3}X + X^2\right)X$, $p = 5$.

**E10.** Să se determine polinoamele $f, g \in \mathbb{R}[X]$, $f = aX + b$, $g = cX + d$, în cazurile:

a) $X^2 \cdot f + \left(X^2 + 1\right)g = X^3 + 1$;

b) $(X+1)^2(X+f) + (X+g)X = X^3 + 1$.

## APROFUNDARE

**A1.** Să se determine parametrii pentru care polinoamele f și g sunt egale:

a) $f, g \in \mathbb{Q}[X]$, $f = 2 + 3X + (m+1)X^2$, $g = (2m+4) + 3X + \left(m^2 - 1\right)X^3$;

b) $f, g \in \mathbb{C}[X]$, $f = m + nX + (m+n)X^2$, $g = m^2 + n^2X + 2X^2$;

c) $f, g \in \mathbb{Z}_3[X]$, $f = m + \hat{1} + \left(m + \hat{2}\right)X + 2X^2$, $g = n + m^2X + m^5X^2$.

**A2.** Fie $f \in \mathbb{C}[X]$, $f = n^2 - 1 + (m+n)^2X + \left(m^2 - 1\right)X^2$. Pentru ce valori $m, n \in \mathbb{C}$ polinomul f este polinom nul?

**A3.** Se consideră polinoamele $f, g \in \mathbb{C}[X]$, $f = (a-b)X^3 + (2a+b+1)X + a + 1$ și $g = (2a-b-1)X^3 + \left(a^2 + b^2\right)X + 1 - b$. Pentru ce valori $a, b \in \mathbb{C}$ polinoamele au același grad?

**A4.** Fie $f \in \mathbb{C}[X]$, $f = X^2 - aX - b$. Să se determine a și b știind că $f(1) = 2$, $f(-2) = 8$.

**A5.** Să se determine $f \in \mathbb{C}[X]$ de gradul 2 dacă $f(1) = f(2) = 0$ și $f(3) = 6$.

**A6.** Să se determine $f \in \mathbb{Z}_5[X]$ de gradul 2 dacă $f(\hat{1}) = f(\hat{3}) = \hat{2}$ și $f(\hat{0}) = \hat{3}$.

**A7.** Fie $f = 1 + aX + X^2 \in \mathbb{C}[X]$. Să se demonstreze că dacă $f(1+z) = f(1-z)$, $\forall\ z \in \mathbb{C}$, atunci f este pătratul unui polinom de gradul 1.

**A8.** Fie $f \in \mathbb{Z}_3[X]$, $f = a + bX + cX^2$. Să se determine f știind că funcția $\tilde{f}$ este egală cu funcția polinomială atașată polinomului $g \in \mathbb{Z}_3[X]$, $g = \hat{2} - X + \hat{2}X^2$.

**A9.** Se consideră polinomul $f = \hat{1} + \hat{3}X + X^2 + \hat{2}X^3 \in \mathbb{Z}_5[X]$. Să se determine polinoamele $g \in \mathbb{Z}_5[X]$, de grad cel mult 3, astfel încât $\tilde{f} = \tilde{g}$.

**A10.** Să se determine $a, b \in \mathbb{C}$, astfel încât polinoamele $f, g \in \mathbb{C}[X]$, $f = a + X$, $g = 2 + bX$ să verifice egalitatea $f \cdot g = X^2 - 4$.

**A11.** Să se determine $f \in \mathbb{C}[X]$, dacă:

a) $f \cdot (X^2 + 2X + 4) = X^3 - 8$;

b) $f \cdot (X^2 + X + 1) = X^4 + X^2 + 1$;

c) $f \cdot (1 - X)(1 + X^2) = X^8 - 1$.

**A12.** Fie $f, g \in \mathbb{Z}_3[X]$, $f = a + X + X^2$, $g = b + aX$. Pentru ce valori ale lui „a" și „b" există egalitatea:

$(X + \hat{1})f - (X^2 + \hat{2})g = X^2 - X - X^3$ ?

**A13.** Aflați polinoamele $f \in K[X]$, în cazurile:

a) $\text{grad}(f) = 2$ și $(f(x))^2 = f(x^2)$, $\forall\ x \in K$;

b) $\text{grad}(f) \le 2$ și $f(x^2 + 1) = f^2(x) + 1$, $\forall\ x \in K$;

c) $f(x-1) + 2f(2-x) = x^2 + x + 1$, $\forall\ x \in K$.

**A14.** Să se arate că următoarele funcții nu sunt funcții polinomiale:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$;

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + |x|$;

c) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z + |z|$;

d) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z^2 + \bar{z}$.

**A15.** Să se arate că oricare funcție $f : \mathbb{Z}_3 \to \mathbb{Z}_3$ este funcție polinomială. Generalizare.

## 3.2. Împărțirea polinoamelor

Fie $(K, +, \cdot)$ un corp comutativ și polinoamele $f, g \in K[X]$, g polinom nenul.

### ❖ DEFINIȚIE

• A împărți polinomul f la polinomul nenul g în $K[X]$ înseamnă a determina polinoamele $q, r \in K[X]$, astfel încât:

**a)** $f = g \cdot q + r$; **b)** $\text{grad}(r) < \text{grad}(g)$. (1)

Polinomul f se numește **deîmpărțit**, g se numește **împărțitor**, iar polinoamele q și r se numesc **câtul**, respectiv **restul** împărțirii.

Având în vedere egalitatea $f = g \cdot q + r$, se obține egalitatea:

$\operatorname{grad}(q) = \operatorname{grad}(f) - \operatorname{grad}(g)$.

În legătură cu împărțirea a două polinoame în inelul $K[X]$ se pun câteva probleme:

- Pentru oricare două polinoame există un cât și un rest al împărțirii?
- Dacă există câtul și restul împărțirii, atunci acestea sunt unice?
- Prin ce algoritm se pot determina câtul și restul împărțirii?

Răspunsurile la aceste probleme sunt date de următoarea teoremă.

▣ **TEOREMA 3 (teorema împărțirii cu rest)**

Fie $f, g \in K[X], g \neq 0$. Atunci există și sunt unice polinoamele $q, r \in K[X]$ cu proprietățile:

**a)** $f = g \cdot q + r$;

**b)** $\operatorname{grad}(r) < \operatorname{grad}(g)$.

*Demonstrație*

**Unicitatea câtului și restului**

Folosim metoda reducerii la absurd. Presupunem că există polinoamele $q_1, q_2, r_1, r_2 \in K[X]$, astfel încât $q_1 \neq q_2, r_1 \neq r_2$ care verifică relațiile: $f = g \cdot q_1 + r_1$, $f = g \cdot q_2 + r_2$ și $\operatorname{grad}(r_1) < \operatorname{grad}(g)$, $\operatorname{grad}(r_2) < \operatorname{grad}(g)$.

Atunci rezultă că $f = g \cdot q_1 + r_1 = g \cdot q_2 + r_2$, relație din care rezultă egalitatea $g(q_1 - q_2) = r_2 - r_1$.

Referitor la grade se obține:

$\operatorname{grad}(g) + \operatorname{grad}(q_1 - q_2) = \operatorname{grad}(r_2 - r_1) < \operatorname{grad}(g)$.

Contradicția rezultată conduce la egalitatea $q_1 = q_2$, și apoi $r_1 = r_2$.

**Existența**

Fie $n = \operatorname{grad}(f)$, $m = \operatorname{grad}(g)$. Deosebim cazurile:

**1.** Pentru $n < m$, avem $f = 0 \cdot g + f$ și se ia $q = 0, r = f$.

**2.** Pentru $n \geq m$, fie $f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \ldots + a_nX^n$, $g = b_0 + b_1X + b_2X^2 + \ldots + b_mX^m$.

Considerăm polinomul:

$g_1 = a_n \cdot b_m^{-1} X^{n-m} \cdot g = a_n X^n + a_n b_{m-1} \cdot b_m^{-1} \cdot X^{n-1} + \ldots + b_0 a_n b_m^{-1} X^{n-m}$.

Rezultă că polinomul $f_1 = f - g$ are gradul strict mai mic decât gradul polinomului f.

Fie $f_1 = c_0 + c_1 X + c_2 X^2 + \ldots + c_{n_1} X^{n_1}$, $n_1 < n$.

• Dacă $n_1 < m$, avem $f_1 = f - a_n b_m X^{n-m} g$ sau $f = a_n b_m^{-1} X^{n-m} g + f_1$ și se ia $q = a_n b_m^{-1} X^{n-m}$ și $r = f_1$.

• Dacă $n_1 \geq m$ repetăm procedeul anterior de micșorare a gradului printr-o nouă scădere, luând: $g_2 = c_{n_1} \cdot b_m^{-1} \cdot X^{n_1 - m} \cdot g$ și $f_2 = f_1 - g_2$. Evident $n_2 = \text{grad}(f_2) < n_1 < n$.

Se repetă procedeul pentru perechile de polinoame $(f_2, g_2)$ și se obțin succesiv relațiile:

$f_1 = f - g_1$
$f_2 = f_1 - g_2$
$f_3 = f_2 - g_3$
..................
$f_{p+1} = f_p - g_{p+1}$
..................
$f_s = f_{s-1} - g_s$

Deoarece între gradele polinoamelor $f, f_1, f_2, \ldots, f_p, \ldots$ există relațiile: $n > n_1 > n_2 > \ldots > n_p > \ldots$ și $m \in \{1, 2, \ldots, n\}$, atunci există un număr $s \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $s < m$.

Adunând relațiile anterioare, se obține:

$f_s = f - g_1 - g_2 - \ldots - g_s$, $\text{grad}(f_s) = n_s < m$.

Așadar, $f = \left( \sum_{k=1}^{s} g_k \right) + f_s = g \cdot q + f_s$, deoarece fiecare polinom $g_k$ verifică egalitatea $g_k = g \cdot \alpha \cdot X^{n_k - m}$, cu $\alpha \in K$.

Luând $r = f_s$, teorema este demonstrată. ■

## ➲ OBSERVAȚIE

- Teorema împărțirii cu rest oferă un algoritm concret de determinare a câtului și a restului împărțirii a două polinoame.

☞ ***Exemplu***

- Fie $f \in \mathbb{C}[X]$, $f = X^3 + X^2 + X + 2$, $g = X^2 - X + 1$.

  Construim polinoamele $g_1 = X^{3-2} \cdot g = X \cdot g = X^3 - X^2 + X$.

  Se obține $f_1 = f - g_1 = 2X^2 + 2$, $g_2 = 2g = 2X^2 - 2X + 2$ și $f_2 = f_1 - g_2 = 2X$. Cum $f_2$ are gradul mai mic decât gradul lui g, restul va fi $r = 2X$.

  Avem $f = f_2 + g_1 + g_2 = f_2 + Xg = (X + 2) \cdot g + 2X$ și astfel $q = X + 2$ și $r = 2X$.

Algoritmul sugerat în demonstrația teoremei poate fi aranjat sub o formă convenabilă, urmând o cale analoagă împărțirii cu rest a numerelor întregi.

Se procedează astfel:

• Se împarte monomul dominant al deîmpărțitului la monomul dominant al împărțitorului. Se obține astfel monomul dominant al câtului.

• Se înmulțește monomul obținut la cât cu împărțitorul g și produsul obținut se scade din deîmpărțitul f. Se obține polinomul $f_1$.

• Se continuă împărțirea luând ca deîmpărțit polinomul $f_1$ și se împarte monomul dominant al lui $f_1$ la monomul dominant al lui g rezultând al doilea monom al câtului.

• Se repetă procedeul anterior până când polinomul $f_s$ are gradul inferior gradului polinomului g.

Polinomul $f_s$ va fi restul împărțirii. Schema de calcul arată astfel:

| | |
|---|---|
| $(f): \ a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1X + a_0$ | $b_mX^m + b_{m-1}X^{m-1} + \ldots + b_0 \quad (g)$ |
| $-a_nX^n - a_nb_{m-1}b_m^{-1}X^{n-1} - \ldots$ | $\underbrace{a_nb_m^{-1}X^{n-m}}_{\text{primul monom al câtului}} + \underbrace{\qquad}_{\text{al doilea monom al câtului}} + \ldots$ |
| $(f_1):$ | (câtul) |
| $(f_2):$ | |
| Restul $(f_s):$ | |

☞ ***Exemplu***

◆ Să se împartă polinomul $f \in \mathbb{C}[X]$, $f = X^4 + X^2 + 1$ la polinomul $g \in \mathbb{C}[X]$, $g = X - 1$.

**Secvențele împărțirii**

Monomul dominant al câtului este $X^{4-1} = X^3$. Se obține:

• $f_1 = f - X^3g = f - X^3(X-1) = X^3 + X^2 + 1$.

• Al doilea monom al câtului este: $X^{3-1} = X^2$.

Se obține: $f_2 = f_1 - X^2g = 2X^2 + 1$.

• Al treilea monom al câtului este $2X^{2-1} = 2X$, iar $f_3 = f_2 - 2X \cdot g = 2X + 1$.

• Al patrulea monom al câtului este $2X^{1-1} = 2$, iar $f_4 = f_3 - 2g = 3 = $ restul.

**Schema împărțirii**

| deîmpărțitul | împărțitorul |
|---|---|
| $(f) \ X^4 + X^2 + 1$ | $X - 1 \quad (g)$ |
| $-X^4 + X^3$ | $X^3 + X^2 + 2X + 2$ (câtul) |
| $(f_1) \ X^3 + X^2 + 1$ | |
| $-X^3 + X^2$ | |
| $(f_2) \ 2X^2 + 1$ | |
| $-2X^2 + 2X$ | |
| $(f_3) \ 2X + 1$ | |
| $-2X + 2$ | |
| $(f_4) \ 3$ (restul) | |

## ➲ OBSERVAȚII

**1.** În cadrul algoritmului anterior, asupra coeficienților celor două polinoame f și g se efectuează numai operații de adunare și înmulțire în corpul K. Astfel, va rezulta că polinoamele cât și rest vor avea coeficienți în corpul K.

**2.** Fie $f, g \in K[X]$ și $f = gq + r$, unde q este câtul, iar r este restul împărțirii lui f la g.

Dacă împărțim f la $g_1 = ag$, $a \in K$, putem scrie $f = agq_1 + r_1$.

Dar $f = gq + r = ag\left(a^{-1}q\right) + r = agq_1 + r$ și din unicitatea câtului și restului rezultă $r_1 = r$ și $q_1 = a^{-1}q$.

# EXERCIȚII ȘI PROBLEME

### EXERSARE

**E1.** Să se efectueze împărțirile de polinoame în $\mathbb{C}[X]$:

a) $f = X^3 + X + 1$, $g = X - 1$;

b) $f = X^4 + 2X^3 + X + 2$, $g = X^2 + X + 1$;

c) $f = (X+1)(X+2) + X^3$, $g = (X-1)(X+1)$;

d) $f = X^5 + X^4 + X^2 + 1$, $g = X^2 + 1$;

e) $f = X^4 + iX^2 + X + i$, $g = X + 1$;

f) $f = X^4 + (1+i)X^3 - i + 1$, $g = X^2 + i$.

**E2.** Să se efectueze împărțirile de polinoame în $\mathbb{Z}_p[X]$:

a) $f = X^3 + X^2 + \hat{1}$, $g = X + \hat{2}$, $p = 3$;

b) $f = 2X^4 + \hat{3}X + \hat{2}$, $g = X + \hat{3}$, $p = 5$;

c) $f = X^5 - X^4 + X - \hat{1}$, $g = X^2 + \hat{1}$, $p = 2$;

d) $f = \left(X^2 + \hat{1}\right)^2 + 2\left(X^3 + \hat{2}\right)$, $g = \left(X + \hat{1}\right)^2 + \hat{1}$, $p = 3$.

**E3.** Să se determine polinomul $g \in \mathbb{C}[X]$ știind că $f = X^3 - X^2 + X + 15 \in \mathbb{C}[X]$, împărțit la g dă câtul $q = X + 2$ și restul $r = 1$.

**E4.** Să se efectueze împărțirile de polinoame în $\mathbb{C}[X]$:

a) $f = (X-1)^3 + (X+1)^3$, $g = (X-1)^2 + (X+1)^2$;

b) $f = (X-1)^2(X+2) + (X+1)^2(X+2)$, $g = X^2 + X + 1$;

c) $f = (X-1)(X+2)(X+3) + X$, $g = X(X+1)$;

d) $f = X(X-i)(X-2i)(X-3i)$, $g = (X+i)(X-i)$.

**E5.** Să se efectueze în $\mathbb{Z}_p[X]$, împărțirile:

a) $f = \left(X + \hat{2}\right)^3$, $g = \left(X + \hat{1}\right)^2$, $p = 3$;

b) $f = \left(X + \hat{2}\right)\left(X + \hat{3}\right)\left(X + \hat{4}\right)$, $g = \left(2X + \hat{1}\right)^2$, $p = 5$;

c) $f = \left(X^3 + X + \hat{1}\right)^2$, $g = \left(X^2 + \hat{1}\right)^2$, $p = 7$.

## APROFUNDARE

**A1.** Să se determine câtul și restul împărțirii polinomului f la g:

a) $f = X^6 + \hat{3}X^4 + \hat{2}$, $g = X^2 + \hat{3}$, în $\mathbb{Z}_5[X]$;

b) $f = X^8 + \hat{2}X^4 + X^2 + \hat{1}$, $g = X^4 + X + 1$, în $\mathbb{Z}_3[X]$;

c) $f = \hat{2}X^{10} + \hat{3}X^8 + \hat{2}X + \hat{2}$, $g = X^5 + X^4 + \hat{2}$, în $\mathbb{Z}_5[X]$.

**A2.** Să se determine parametrii pentru care restul împărțirii polinomului $f \in K[X]$ la $g \in K[X]$ este cel specificat:

a) $f = X^4 + X - a$, $g = 2X + 1$, $r = 0$, $K = \mathbb{C}$;

b) $f = aX^3 + bX^2 + 2$, $g = X^2 - 1$, $r = 2X$, $K = \mathbb{R}$;

c) $f = X^3 + aX^2 - bX + 1$, $g = X^2 - 3X + 2$, $r = X - 1$, $K = \mathbb{Q}$;

d) $f = X^3 + aX^2 + \hat{2}X + \hat{1}$, $g = X - \hat{2}$, $r = \hat{1}$, $K = \mathbb{Z}_3$;

e) $f = X^4 + \hat{2}X^3 + aX + b$, $g = \hat{2}X^2 - \hat{1}$, $r = X + \hat{1}$, $K = \mathbb{Z}_5$.

**A3.** Fie r restul împărțirii polinomului $f \in \mathbb{C}[X]$, $f = X^4 + X^2 + 1$ la polinomul $g = X^2 + 2X \in \mathbb{C}[X]$. Să se arate că șirul $(r(n))_{n\in\mathbb{N}}$ este o progresie aritmetică.

**A4.** Să se afle restul împărțirii polinomului $f \in K[X]$ la polinomul $(X - a)(X - b)$, în cazurile:

a) $a = 1$, $b = 2$, $K = \mathbb{Q}$, $f(1) = 3$, $f(2) = 2$;

b) $a = i$, $b = 1 + i$, $K = \mathbb{C}$, $f(i) = i$, $f(1 + i) = -i$;

c) $a = \hat{1}$, $b = \hat{3}$, $K = \mathbb{Z}_5$, $f(\hat{1}) = \hat{0}$, $f(-\hat{2}) = \hat{1}$.

**A5.** Să se determine polinoamele de gradul al treilea, $f \in \mathbb{R}[X]$, știind că f împărțit la $X^2 + X$ dă restul $r = X + 1$ și împărțit la $X^2 - X$ dă restul $r_1 = 3X + 1$.

*(Univ. Craiova, 1997)*

**A6.** Fie $f \in \mathbb{Q}[X]$, $f = X^3 - 3X^2 + aX + b$. Să se determine $a, b \in \mathbb{Q}$ pentru care f împărțit la $X - 2$ dă restul 0 și împărțit la $X - 1$ dă restul 4.

(Univ. Transilvania, Brașov, 2002)

**A7.** Polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$ are coeficientul dominant 1. Să se determine f și $a, b \in \mathbb{R}$ știind că f împărțit la $X - a$ dă câtul $X^2 - 3X + 4$, iar câtul împărțirii lui f la $X - b$ este $X^2 - 4X + 2$.

**A8.** Un polinom $f \in \mathbb{R}[X]$ prin împărțirea la $X - a$, $X - b$, $X - c$ dă câturile $q_1, q_2, q_3$. Să se arate că $(b - a)q_1(b) + (c - b)q_2(c) + (a - c)q_3(a) = 0$.

**A9.** Un polinom $f \in \mathbb{C}[X]$ împărțit la $X - 1$, $X + 1$ și $X + 4$ dă resturile 15, 7, respectiv $-80$.

a) Să se afle restul r al împărțirii lui f la $(X - 1)(X + 1)(X + 4)$.

b) Să se determine:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{r(1) + r(2) + \ldots + r(n)}{1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n(n + 1)}.$$

**A10.** Să se determine $f \in \mathbb{C}[X]$, $f = X^4 + aX^3 + bX^2 + cX + 3$, știind că împărțit la $X^2 - 1$ dă restul $R_1$, împărțit la $X^2 + 1$ dă restul $R_2$ și $R_1 \cdot R_2 = 5X^2 - 28X + 15$.

*(ASE, București, 2000)*

**A11.** Se consideră polinomul $f \in \mathbb{C}[X]$, $f = (X+1)^{10}$, având forma algebrică $f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \ldots + a_{10}X^{10}$.

a) Să se calculeze $f(0)$.

b) Să se calculeze suma coeficienților polinomului f.

c) Să se arate că $a_0 + a_2 + \ldots + a_{10} = 2^9$.

*(Bacalaureat, august, 2002)*

**A12.** Fie $n \in \mathbb{N}^*$, P, Q, $T \in \mathbb{R}[X]$, $P = X^n + X^{2n+1} + X^{3n+2} + \ldots + X^{n^2+n-1}$, $Q = X^{n-1} + X^{n-2} + \ldots + X + 1$ și T restul împărțirii lui P la Q. Dacă s este suma pătratelor coeficienților polinomului T, atunci:

a) $s = n^3 + 2$; b) $s = \frac{n(n+1)}{2}$;

c) $s = 0$; d) $s = n + 5$; e) $s = 16$.

*(ASE, București, 2003)*

## 3.3. Împărțirea la $X - a$. Schema lui Horner

Fie $f \in K[X]$, $f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \ldots + a_nX^n$ un polinom de gradul n și $g = X - a \in K[X]$.

**▣ TEOREMA 4 (a restului)**

Restul împărțirii polinomului nenul $f \in K[X]$, la polinomul $g = X - a \in K[X]$ este egal cu valoarea $f(a)$ a polinomului f în a.

<u>*Demonstrație*</u>

Din teorema împărțirii cu rest se obține:

$r = f(a)$

$f = (X-a)q + r$, $\text{grad}(r) < 1$, deci $r \in K$.

Rezultă că $f(a) = 0 \cdot q(a) + r$, de unde $r = f(a)$. ■

Teorema restului este eficientă pentru determinarea restului împărțirii unui polinom prin $X - a$, fără a efectua împărțirea.

### *Exercițiu rezolvat*

☒ Se consideră polinomul $f \in \mathbb{C}[X]$, $f = X^{2n} + 5X^{n+1} + 7$. Să se determine restul împărțirii polinomului f la $X - i$ știind că împărțit la $X - 2$ dă restul 151.

<u>*Soluție*</u>

Din teorema restului se obține că $151 = r = f(2) = 2^{2n} + 5 \cdot 2^{n+1} + 7$. Se obține ecuația exponențială $2^{2n} + 10 \cdot 2^n - 144 = 0$. Se notează $2^n = a$ și rezultă ecuația $a^2 + 10a - 144 = 0$, cu soluțiile $a \in \{8, -18\}$. Avem $2^n = 8$ cu soluția $n = 3$. Așadar $f = X^6 + 5X^4 + 7$. Restul împărțirii lui f la $X - i$ este $r = f(i) = 11$.

## Schema lui Horner

Fie $f \in K[X], f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \ldots + a_nX^n$, polinom nenul de gradul n și $g = X - a \in K[X]$.

Notăm $q = b_0 + b_1X + b_2X^2 + \ldots + b_{n-1}X^{n-1}$ câtul împărțirii polinomului f la g. Din teorema împărțirii cu rest se obține:

$$f = (X - a)\left(b_0 + b_1X + \ldots + b_{n-1}X^{n-1}\right) + r = r - ab_0 + (b_0 - ab_1)X +$$

$$+(b_1 - ab_2)X^2 + \ldots + (b_{n-1} - ab_n)X^n, \ (1).$$

Identificând coeficienții celor două polinoame în relația (1) se obține:

$a_n = b_{n-1}$
$a_{n-1} = b_{n-2} - ab_{n-1}$
$a_{n-2} = b_{n-3} - ab_{n-2}$
............................
$a_2 = b_1 - ab_2$
$a_1 = b_0 - ab_1$
$a_0 = r - ab_0$

Aceste relații permit deducerea în mod recursiv a coeficienților câtului $b_{n-1}, b_{n-2}, \ldots, b_1, b_0$ și a restului r.

Avem:

$b_{n-1} = a_n$
$b_{n-2} = a_{n-1} + ab_{n-1}$
$b_{n-3} = a_{n-2} + ab_{n-2}$
..............................
$b_0 = a_1 + ab_1$
$r = a_0 + ab_0$

În mod practic, pentru determinarea coeficienților $b_{n-1}, b_{n-2}, \ldots, b_1, b_0$ ai câtului și a restului r se alcătuiește următoarea schemă:

| | Coeficienții lui f în ordine descrescătoare a gradelor monoamelor | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $a_n$ | $a_{n-1}$ | $a_{n-2}$ | ... | $a_1$ | $a_0$ |
| a | $b_{n-1} = a_n$ | $b_{n-1}a + a_{n-1}$ | $b_{n-2}a + a_{n-2}$ | ... | $b_1a + a_1$ | $b_0a + a_0$ |
| | $b_{n-1}$ | $b_{n-2}$ | $b_{n-3}$ | ... | $b_0$ | r |
| | Coeficienții câtului | | | | | Restul |

Această schemă de lucru în care se operează numai cu elementul $a \in K$ și coeficienții polinomului f se numește **schema lui Horner**. Schema lui Horner are la bază relația de recurență:

$b_k = b_{k-1} \cdot a + a_{k-1}$, $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$.

## *Probleme rezolvate*

☒ **1.** Să se efectueze împărțirea polinomului f la g, dacă:

**a)** $f, g \in \mathbb{Q}[X]$, $f = X^4 - 3X^3 + 4X^2 - 3X + 1$, $g = X - 2$;

**b)** $f, g \in \mathbb{R}[X]$, $f = 3X^5 - 4X^3 + 3X^2 - X - 5$, $g = X + 1$;

**c)** $f, g \in \mathbb{R}[X]$, $f = 8X^3 - 2X^2 + X + 2$, $g = 2X - 1$.

<u>*Soluție*</u>

**a)** Folosim schema lui Horner pentru $a = 2$. Avem:

| | 1 | –3 | 4 | –3 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| $a = 2$ | 1 | $1 \cdot 2 - 3 = -1$ | $-1 \cdot 2 + 4 = 2$ | $2 \cdot 2 - 3 = 1$ | $1 \cdot 2 + 1 = 3$ |

Câtul împărțirii este $q = 1 \cdot X^3 + (-1) \cdot X^2 + 2X + 1$, iar restul $r = 3$.

**b)** În acest caz avem $g = X - (-1)$, deci $a = -1$. Schema lui Horner:

| | 3 | 0 | –4 | 3 | –1 | –5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $a = -1$ | 3 | $3 \cdot (-1) + 0 =$ $-3$ | $(-3) \cdot (-1) - 4 =$ $-1$ | $(-1) \cdot (-1) + 3 =$ $4$ | $4 \cdot (-1) - 1 =$ $-5$ | $(-5) \cdot (-1) - 5 =$ $0$ |

Se obține $q = 3X^4 + (-3)x^3 + (-1)X^2 + 4X + (-5)$ și $r = 0.$

**c)** Scriem $g = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)$. Vom împărți mai întâi polinomul f prin $X - \frac{1}{2}$. Alcătuim schema lui Horner cu $a = \frac{1}{2}$.

| | 8 | –2 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| $a = \frac{1}{2}$ | 8 | 2 | 2 | 3 |

Se obține câtul $q_1 = 8X^2 + 2X + 2$ și restul $r_1 = 3$. Câtul împărțirii lui f la g este $q = \frac{1}{2} q_1 = 4X^2 + X + 1$, iar restul $r = r_1 = 3$ (vezi observația 2, §3.2.)

☒ **2.** Fie $f, g \in \mathbb{Z}_3[X]$, $f = \hat{2}X^5 - X^4 + \hat{2}X^2 + mX + \hat{1}$, $g = X + \hat{2}$. Să se determine $m \in \mathbb{Z}_3$, știind că restul împărțirii lui f la g este $r = \hat{2}$.

*Soluție*

Aflăm restul împărțirii polinomului f la g prin schema lui Horner. Avem $a = -\hat{2} = \hat{1}$.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\hat{2}$ | $-\hat{1}$ | $\hat{0}$ | $\hat{2}$ | m | $\hat{1}$ |
| $a = \hat{1}$ | $\hat{2}$ | $\hat{1}$ | $\hat{1}$ | $\hat{0}$ | m | $m + \hat{1}$ |

Restul împărțirii este $r = m + \hat{1}$ și se obține ecuația $m + \hat{1} = \hat{2}$, deci $m = \hat{1}$.

## EXERCIȚII ȘI PROBLEME

### EXERSARE

**E1.** **Să se determine restul împărțirii polinomului $f \in K[X]$ la $X - a \in K[X]$, în cazurile:**

**a)** $f = X^3 - 2007X^2 + 2006$, $a = 1$, $K = \mathbb{R}$;

**b)** $f = 2X^8 - 3X^7 + X + 1$, $a = -1$, $K = \mathbb{Q}$;

**c)** $f = X^{10} + 2X^4 + 3$, $a = i$, $K = \mathbb{C}$;

**d)** $f = \hat{2}X^7 + \hat{4}X^6 + \hat{3}X + \hat{2}$, $a = \hat{2}$, $K = \mathbb{Z}_5$.

**E2.** **Să se determine $m \in K$ cu proprietatea că polinomul $f \in K[X]$, împărțit la $g = X - a \in K[X]$ dă restul specificat:**

**a)** $f = X^3 + mX^2 + 3X - m$, $a = 2$, $K = \mathbb{C}$, $r = 17$;

**b)** $f = X^4 + mX^2 + 2$, $a = -i$, $K = \mathbb{C}$, $r = 3 + i$;

**c)** $f = \hat{2}X^4 + \hat{2}X^3 - mX + \hat{1}$, $a = \hat{2}$, $K = \mathbb{Z}_7$, $r = \hat{3}$.

**E3.** **Să se determine câtul și restul împărțirii polinomului $f \in \mathbb{R}[X]$ la polinomul $g \in \mathbb{R}[X]$:**

**a)** $f = X^5 + 4X^4 + 3X^2 + X - 2$, $g = X - 2$;

**b)** $f = -2X^4 + 3X^3 + 5X^2 - 6X - 1$, $g = X - 3$;

**c)** $f = 3X^6 + 2X^4 + 2X^2 + X + 2$, $g = X + 1$;

**d)** $f = X^8 + X^4 + X^2 + 1$, $g = X + 2$;

**e)** $f = 6X^3 + 2X + 2$, $g = 2X - 1$;

**f)** $f = X^4 + 3X^2 + X - 6$, $g = 2X + 1$.

**E4.** **Să se împartă polinomul $f \in K[X]$ la polinomul $g \in K[X]$ prin schema lui Horner:**

**a)** $f = X^3 + X^2 + X + 1$, $g = X - i$, $K = \mathbb{C}$;

**b)** $f = X^4 - X^3 + X^2 - X + 2$, $g = X + i$, $K = \mathbb{C}$;

**c)** $f = 2X^3 + X - i$, $g = X + 2i$, $K = \mathbb{C}$;

**d)** $f = X^4 + \hat{2}X^3 + \hat{3}X + \hat{1}$, $g = X + \hat{2}$, $K = \mathbb{Z}_5$;

**e)** $f = \hat{2}X^5 - \hat{3}X^3 + \hat{4}X - \hat{4}$, $g = \hat{2}X - \hat{1}$, $K = \mathbb{Z}_5$.

## APROFUNDARE

**A1.** Să se determine $m \in \mathbb{R}$, astfel încât restul împărțirii polinomului $f \in \mathbb{C}[X]$, la $X + i$ să fie număr real, dacă:

a) $f = X^3 + mX^2 + mX + 3$;

b) $f = X^4 - \left(m^2 - 1\right)X - 8i$.

**A2.** Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât restul împărțirii polinomului $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = 2X^3 - mX^2 + X - 7$ la $X - 2$ să fie 3.
*(Univ. Transilvania, Brașov, 2002)*

**A3.** Se consideră polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^4 + X^3 + aX + 6a$. Să se determine parametrul $a \in \mathbb{R}$, astfel încât restul împărțirii polinomului $f(X+2)$ la $X + 1$ să fie egal cu $-12$.
*(Univ. Transilvania, Brașov, 2002)*

**A4.** Împărțind polinomul $f \in \mathbb{C}[X]$, $f = 2X^3 - mX^2 + nX - 6$ la $X - 3$ și $X + 1$ se obțin resturi egale cu $-2$. Să se afle restul împărțirii polinomului f la $X - 2$.

**A5.** Să se determine câtul și restul împărțirii polinomului $f = 3X^3 + mX^2 + 15 \in \mathbb{R}[X]$ la polinomul $g = X - 2 \in \mathbb{R}[X]$, știind că restul împărțirii acestuia la $2X - 1$ este $r = \frac{225}{8}$.

**A6.** Să se determine $a, b \in \mathbb{Z}_5[X]$ știind că împărțind polinomul $f \in \mathbb{Z}_5[X]$, $f = X^3 + aX^2 + \hat{4}X + b$, la polinoamele $g_1, g_2 \in \mathbb{Z}_5[X]$, $g_1 = X - \hat{1}$, $g_2 = \hat{2}X + \hat{1}$ se obțin resturile $r_1 = \hat{2}$, $r_2 = \hat{3}$.

**A7.** Să se determine restul împărțirii polinomului $f \in \mathbb{C}[X]$, $f = X^{n+1} - 3X^n + 4$ la $X + 2 \in \mathbb{C}[X]$, știind că restul împărțirii lui f la $X - 2$ este $-12$.

**A8.** Împărțind polinomul $f \in \mathbb{C}[X]$, $f = X^m + X^n + 1$ la polinomul $X - 2 \in \mathbb{C}[X]$ se obține restul 13 și împărțindu-l la $X - 4 \in \mathbb{C}[X]$ se obține restul 81. Să se determine restul împărțirii lui f la $X - i$.

**A9.** Polinomul $f \in K[X]$ împărțit la $X - a \in K[X]$ și $X - b \in K[X]$ dă câturile $q_1$ și $q_2$. Să se arate că $q_1(b) = q_2(a)$.

**A10.** Să se determine polinomul $f \in \mathbb{Z}_3[X]$, $f = X^8 + aX^7 + \hat{2}X^3 + X + b$, știind că împărțit la $g = X - \hat{2}$ dă câtul q și restul $r = \hat{2}$, iar q împărțit la $g_1 = X + \hat{2}$ dă restul $r_1 = \hat{0}$.

**A11.** Se consideră polinomul $f \in \mathbb{C}[X]$, $f = X^4 + X^3 + X^2 + X + 2$. Să se determine câtul împărțirii polinomului f la polinomul $g = X - \cos\alpha + i\sin\alpha \in \mathbb{C}[X]$, $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, știind că restul împărțirii este $r = 1 + i\left(1 + \sqrt{2}\right)$.

# 4 Divizibilitatea polinoamelor

## 4.1. Relația de divizibilitate pe mulțimea $K[X]$

*Problemă rezolvată*

☒ Fie $f, g \in \mathbb{R}[X]$, $f = 2X^3 + 3X^2 + 3X + 2$, $g = X + 1$.

Să se determine câtul și restul împărțirii polinomului f la g.

<u>Soluție</u>

Aplicăm schema lui Horner și rezultă:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 2 | 3 | 3 | 2 |
| $a = -1$ | 2 | 1 | 2 | 0 |

Se obține câtul $q = 2X^2 + X + 2$ și restul $r = 0$.

Așadar $f = g \cdot (2X^2 + X + 2)$.

Se observă că la această împărțire restul este polinomul nul. Ca și în cazul împărțirii numerelor întregi, împărțirea cu rest zero constituie un caz special.

❖ **DEFINIȚIE**

- Fie $(K, +, \cdot)$ un corp comutativ și polinoamele $f, g \in K[X]$.
  Spunem că polinomul g **divide** polinomul f dacă există un polinom $h \in K[X]$ astfel încât $f = g \cdot h$, (1).

Dacă polinomul g divide polinomul f vom scrie $g \mid f$ (se citește „g divide f“) sau $f \,\vdots\, g$ (se citește „f este divizibil cu g“).

Polinomul g se numește **divizor** al polinomului f, iar polinomul f se numește **multiplu** al polinomului g.

➲ **OBSERVAȚIE**

- Polinomul $f \in K[X]$ se divide cu polinomul $g \in K[X], g \neq 0$, dacă și numai dacă restul împărțirii lui f la g este polinomul nul.

## 4.2. Proprietăți ale relației de divizibilitate

Relația de divizibilitate pe mulțimea de polinoame $K[X]$ are proprietăți asemănătoare cu relația de divizibilitate pe mulțimea $\mathbb{Z}$ a numerelor întregi.

**P1. Relația de divizibilitate pe mulțimea $K[X]$ este reflexivă**

• $f \mid f, \forall f \in K[X]$.

Într-adevăr $f = 1 \cdot f$, deci $f \mid f$.

**P2. Relația de divizibilitate pe mulțimea $K[X]$ este tranzitivă**

• Dacă $f, g, h \in K[X], f \mid g$ și $g \mid h$, atunci $f \mid h$.

Într-adevăr, din ipoteză rezultă că $\exists\, u, v \in K[X]$, astfel încât $g = f \cdot u$ și $h = g \cdot v$. Se obține că $h = g \cdot v = (f \cdot u) \cdot v = f \cdot (uv)$, deci $f \mid h$.

**P3. Polinomul nul $f = 0 \in K[X]$, este divizibil cu oricare polinom $g \in K[X]$,** deoarece $0 = 0 \cdot g$. Se spune că $f = 0$ este cel mai mare element în raport cu divizibilitatea pe $K[X]$.

**P4. Polinoamele constante $f = a, a \in K^*$, sunt divizori pentru orice polinom din $K[X]$.**

**P5. Dacă $f, g, h \in K[X]$, astfel încât $f \mid g$ și $f \mid h$, atunci $f \mid (ug + vh), \forall\ u, v \in K[X]$.**

Într-adevăr, fie $\alpha, \beta \in K[X]$, astfel încât $g = \alpha f, h = \beta f$. Rezultă că $ug + vh = u \cdot (\alpha f) + v \cdot \beta f = f \cdot (\alpha u + \beta v)$, deci $f \mid (ug + vh)$.

❖ **DEFINIȚIE**

• Polinoamele $f, g \in K[X]$ se numesc **asociate în divizibilitate** și se notează $f \sim g$, dacă $f \mid g$ și $g \mid f$.

**▣ TEOREMA 5**

Polinoamele nenule $f, g \in K[X]$ sunt asociate în divizibilitate dacă și numai dacă $\exists\ a \in K \setminus \{0\}$, astfel încât $f = a \cdot g$.

*Demonstrație*

Dacă $f = ag$, atunci $g \mid f$ și cum $g = a^{-1} \cdot f$, rezultă $f \mid g$, deci $f \sim g$.

Reciproc, fie $f \sim g$. Atunci $f \mid g$ și $g \mid f$, deci există $u, v \in K[X]$, astfel încât $f = ug$ și $g = vf$. Se obține că $f = uvf$ și cum f este nenul, rezultă că $uv = 1$. Așadar $u, v \in K \setminus \{0\}$ și teorema este demonstrată. ■

☞ ***Exemple***

- Polinoamele $f, g \in \mathbb{C}[X]$, $f = 2X^2 + X + 1$ și $g = 4X^2 + 2X + 2$ sunt asociate în divizibilitate, deoarece $g = 2f$.
- Polinoamele $f, g \in \mathbb{Z}_5[X]$, $f = \hat{2}X^2 + X + \hat{3}$ și $g = X^2 + \hat{3}X + \hat{4}$ sunt asociate în divizibilitate deoarece $g = \hat{3}f$.

## *Probleme rezolvate*

☒ **1.** Fie $f \in K[X]$. Să se arate că $f \in \mathscr{U}(K[X])$ dacă și numai dacă $f \sim 1$.

<u>Soluție</u>

Presupunem că $f \sim 1$. Atunci există $a \in K^*$, astfel încât $f = a \cdot 1 = a \in K^*$, deci f este un element inversabil în inelul $K[X]$.

Reciproc, fie $f \in \mathscr{U}(K[X])$. Rezultă că există $g \in K[X]$, astfel încât $f \cdot g = 1$. Atunci $\text{grad}(f) + \text{grad}(g) = 0$, deci $\text{grad}(f) = 0$, și cum f este nenul se obține că $f \in K^*$. Așadar $f \sim 1$.

☒ **2.** Să se arate că polinomul $f = (X+1)^{6n+1} + X^{6n+2} \in \mathbb{R}[X]$ se divide cu polinomul $g = X^2 + X + 1 \in \mathbb{R}[X]$.

<u>Soluție</u>

Avem $g = X^2 + X + 1$ și $X + 1 = g - X^2$. Folosind binomul lui Newton rezultă că:

$$(X+1)^{6n+1} = \left(g - X^2\right)^{6n+1} = C_{6n+1}^{0} g^{6n+1} + C_{6n+1}^{1} g^{6n} \cdot \left(-X^2\right) + \ldots +$$

$$+ C_{6n+1}^{6n} g \cdot \left(-X^2\right)^{6n} + C_{6n+1}^{6n+1} \cdot \left(-X^2\right)^{6n+1} = g \cdot h - X^{12n+2}, \ (1).$$

Așadar, $f = (X+1)^{6n+1} + X^{6n+2} = g \cdot h + X^{6n+2} - X^{12n+2} = g \cdot h - X^{6n+2} \cdot$ $\cdot \left(X^{6n} - 1\right) = g \cdot h - X^{6n+2}\left(X^{3n} - 1\right)\left(X^{3n} + 1\right)$, (2).

Dar, $X^{3n} - 1 = \left(X^3\right)^n - 1 = \left(X^3 - 1\right)\left(X^{3n-3} + X^{3n-6} + \ldots + X^3 + 1\right) =$ $= \left(X^3 - 1\right) \cdot h_1$, iar din relația (2) se obține că $f = g \cdot h - X^{6n+2}(X-1) g h_1$, deci f este divizibil cu g.

## 4.3. Cel mai mare divizor comun al polinoamelor

❖ **DEFINIȚIE**

- Fie $f, g \in K[X]$. Un polinom $d \in K[X]$ se numește un **cel mai mare divizor comun** al polinoamelor f și g dacă:

  **1.** d este divizor comun al lui f și g, adică $d \mid f$ și $d \mid g$;

  **2.** oricare ar fi alt divizor comun $d_1$ al polinoamelor f și g, atunci $d_1 \mid d$.

Dacă d este un cel mai mare divizor comun pentru f și g, el se notează $\text{c.m.m.d.c.}(f, g)$ sau, mai simplu $(f, g)$.

❖ **DEFINIȚIE**

- Două polinoame $f, g \in K[X]$ se numesc **relativ prime** (sau **prime între ele**) dacă $(f, g) \sim 1$.

▣ **TEOREMA 6**

Fie $f, g \in K[X]$ două polinoame nenule și $\mathscr{D} = \{d \in K[X] \mid d \text{ este un } \text{c.m.m.d.c.}(f, g)\}$.

Dacă $d_1, d_2 \in \mathscr{D}$, atunci $d_1 \sim d_2$.

*Demonstrație*

Deoarece $d_1, d_2 \in \mathscr{D}$, atunci $d_1 \mid d_2$, dar și $d_2 \mid d_1$, conform condiției 2 din definiția $\text{c.m.m.d.c.}(f, g)$. Așadar $d_1 \sim d_2$. ■

Teorema 6 ne asigură că fiind date două polinoame $f, g \in K[X]$, polinomul $(f, g)$ este unic, abstracție făcând de un factor multiplicativ $a \in K^*$.

În continuare vom considera ca polinom care să desemneze $(f, g)$ polinomul unitar, iar pentru polinoamele constante, polinomul constant 1.

Rezultă că două polinoame $f, g \in K[X]$ sunt prime între ele dacă $(f, g) = 1$.

**▣ TEOREMA 7**

Fie $f, g \in K[X]$ polinoame nenule și $r \in K[X]$ restul împărțirii lui f la g. Dacă există $(f, g)$ și $(g, r)$, atunci $(f, g) = (g, r)$.

*Demonstrație*

Din teorema împărțirii cu rest, există $q \in K[X]$ astfel încât $f = g \cdot q + r,\ \text{grad}(r) < \text{grad}(g)$.

• Dacă $r = 0$, are loc relația $f = g \cdot q$ și $(f, g) = g = (g, 0) = (g, r)$.

• Fie $r \neq 0$ și $d = (f, g),\ d_1 = (g, r)$.

Deoarece $d \mid f$ și $d \mid g$ rezultă că $d \mid (f - gq)$, deci $d \mid r$ și astfel $d \mid (g, r) = d_1$.

Din relația $d_1 = (g, r)$ și $f = gq + r$ se obține că $d_1 \mid f$, deci $d_1$ este divizor comun pentru f și g. Rezultă că $d_1 \mid d$ și, astfel $d_1 \sim d$. ■

Această teoremă oferă posibilitatea calculării polinomului $(f, g)$, folosind polinoame de grad mai mic.

☞ ***Exemplu***

Fie $f, g \in \mathbb{R}[X],\ f = X^4 - 3X^2 + 2,\ g = X^3 - X$.

Avem: $f = g \cdot X + \left(-2X^2 + 2\right)$. Rezultă că $(f, g) = \left(g, -2X^2 + 2\right)$. Așadar problema s-a redus la a calcula c.m.m.d.c.$\left(X^3 - X, -2X^2 + 2\right)$. Avem $g = X^3 - X = X(X-1)(X+1)$ și $r = -2(X-1)(X+1)$. Se obține că c.m.m.d.c.$(f, g) = (X-1)(X+1) = X^2 - 1$.

**▣ TEOREMA 8** (de existență a c.m.m.d.c. pentru două polinoame)

Fie $f, g \in K[X]$. Atunci există un cel mai mare divizor comun al polinoamelor f și g.

*Demonstrație*

**a)** În cazul $f = g = 0$, polinomul nul este un c.m.m.d.c. al polinoamelor f și g.

**b)** Dacă $f \neq 0$ și $g = 0$, avem $(f, g) = f$, iar dacă $f = 0, g \neq 0$, avem $(f, g) = g$.

**c)** Să considerăm f și g polinoame nenule. Din teorema împărțirii cu rest, există polinoamele $q_1, r_1 \in K[X]$, astfel încât:

$$f = gq_1 + r_1,\ \text{grad}(r_1) < \text{grad}(g).$$

Conform teoremei 7 avem că $(f, g) = (g, r_1)$.

• Dacă $r_1 = 0$, atunci $(f, g) = (g, 0) = g$ și teorema este demonstrată.

• Dacă $r_1 \neq 0$, există polinoamele $q_2, r_2 \in K[X]$, astfel încât $g = r_1 q_2 + r_2$, $\text{grad}(r_2) < \text{grad}(r_1)$ și astfel $(g, r_1) = (r_1, r_2)$.

Pentru $r_2 = 0$, $(g, r_1) = r_1$ și astfel $(f, g) = r_1$.

În cazul în care $r_2 \neq 0$ se continuă procedeul obținând șirul de relații:

$$\begin{array}{ll} f = gq_1 + r_1, & \text{grad}(r_1) < \text{grad}(q_1) \\ g = r_1 q_2 + r_2, & \text{grad}(r_2) < \text{grad}(r_1) \\ r_1 = r_2 q_3 + r_3, & \text{grad}(r_3) < \text{grad}(r_2) \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ r_{n-1} = r_n q_{n+1} + r_{n+1}, & \text{grad}(r_{n+1}) < \text{grad}(r_n) \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \end{array}$$

Deoarece $\text{grad}(q) > \text{grad}(r_1) > \text{grad}(r_2) > \ldots > \text{grad}(r_n) > \ldots \geq 0$, se formează un șir descrescător de numere naturale. Rezultă că există $p \in \mathbb{N}$ astfel încât $r_p \neq 0$ și $r_{p+1} = 0$.

În acest caz se obține:

$$(f, g) = (g, r_1) = (r_1, r_2) = \ldots = (r_{p-1}, r_p) = (r_p, 0) = r_p.$$

Așadar, polinomul $r_p$ este un c.m.m.d.c.$(f, g)$. ■



*EUCLID din Alexandria (325-265 î.Hr.)*

*A fost unul dintre marii matematicieni ai Antichității, cu rezultate în toate ramurile matematicii.*

Din demonstrația teoremei rezultă și un algoritm de determinare pentru c.m.m.d.c.$(f, g)$. Acesta este ultimul rest nenul în șirul de polinoame:

$$f, g, r_1, r_2, \ldots, \boxed{r_p}, 0.$$

Acest algoritm poartă numele de **algoritmul lui Euclid** de determinare a c.m.m.d.c. pentru două polinoame.

## *Problemă rezolvată*

☒ Să se determine c.m.m.d.c.$(f, g)$ pentru:

$$f, g \in \mathbb{R}[X],\ f = X^4 - 3X^3 + X^2 - 3X + 4,\ g = X^3 - 1.$$

*Soluție*

Alcătuim șirul de polinoame, prin împărțiri succesive:

$f,\ g,\ r_1 = X^2 - 2X + 1,\ r_2 = 3X - 3,\ r_3 = 0.$

Rezultă că $(f,\ g) \sim 3(X-1)$. Conform convenției de a desemna c.m.m.d.c. prin polinoame unitare, avem $(f,\ g) = X - 1$.

## ➲ OBSERVAȚIE

- Pentru obținerea șirului de polinoame $f,\ g,\ r_1,\ r_2,\ ...,\ r_p,\ 0$ contează doar restul împărțirilor efectuate. Acest fapt permite simplificarea sau înmulțirea acestora cu elemente din corpul K pentru ca împărțirile să fie mai comode.

Astfel, șirul anterior poate fi scris:

$f,\ g,\ r_1 = X^2 - 2X + 1,\ r_2 = X - 1,\ r_3 = 0.$

## ▣ TEOREMA 9 (Etienne Bezout)

Fie $f,\ g \in K[X]$ și $d = (f,\ g)$.

Atunci există polinoamele $u,\ v \in K[X]$, astfel încât $d = uf + vg$.

*Demonstrație*

Aplicând algoritmul lui Euclid se obține șirul de egalități:

$f = g \cdot q_1 + r_1$ (1) $\qquad r_1 = f - gq_1 = \alpha_1 f + \beta_1 g,$ (1′)

$g = r_1 q_2 + r_2$ (2) $\qquad r_2 = g - r_1 q_2 \overset{(1')}{=} \alpha_2 f + \beta_2 g,$ (2′)

$r_1 = r_2 q_3 + r_3$ (3) $\qquad r_3 = r_1 - r_2 q_3 \overset{(2')}{=} \alpha_3 f + \beta_3 g,$ (3′)

.......................................... ..........................................

$r_k = r_{k+1} q_{k+2} + r_{k+2}$ (k)

..........................................

$r_{n-2} = r_{n-1} q_n + r_n = r_{n-1} q_n + d$ (n – 2)

Prin înlocuire din aproape în aproape se obține: $r_k = \alpha_k + \beta_k g$, (k′), și în final $d = r_n = \alpha_n \cdot f + \beta_n \cdot g$.

Luând $u = \alpha_n,\ v = \beta_n$, teorema este demonstrată. ■

☞ ***Exemplu***

- Pentru $f, g \in \mathbb{C}[X]$, $f = X^4 - 3X^3 + X^2 - 3X + 4$, $g = X^3 - 1$, din problema rezolvată, rezultă că $d = 3(X-1) = f\cdot(-X-2) + g\cdot(X^2 - X - 5)$.

## ❖ DEFINIȚIE

- Fie $f, g \in K[X]$. Un polinom $m \in K[X]$ se numește un **cel mai mic multiplu comun** al polinoamelor f și g dacă:

**1.** $f \mid m$ și $g \mid m$ (m este multiplu comun pentru f și g);

**2.** oricare ar fi $m_1 \in K[X]$, multiplu comun pentru f și g rezultă $m \mid m_1$.

Pentru un cel mai mic multiplu comun al polinoamelor f și g se folosește notația $\text{c.m.m.m.c}(f, g)$ sau $[f, g]$.

Dacă $f, g \in K[X]$ sunt polinoame nenule și m este un $\text{c.m.m.m.c.}(f, g)$, atunci oricare polinom $m_1 \sim m$ este un $\text{c.m.m.m.c.}(f, g)$.

Se va considera de regulă că polinomul $[f, g]$ este polinomul unitar.

Pentru determinarea $[f, g]$ se folosește relația:

$f \cdot g \sim (f, g)\cdot[f, g]$, (1).

## ➲ OBSERVAȚIE

- Se poate defini c.m.m.d.c. și c.m.m.m.c. pentru trei, patru sau mai multe polinoame.
  Astfel: $(f, g, h) = ((f, g), h)$ și $[f, g, h] = [[f, g], h]$ etc.

## *Problemă rezolvată*

☒ Să se determine $[f, g]$ pentru $f = X^4 - 3X^3 + X^2 - 3X + 4$ și $g = X^3 - 1$.

*Soluție*

Din relația (1), $f \cdot g \sim (f, g)\cdot[f, g]$, având în vedere că $(f, g) = X - 1$ se obține: $[f, g] \sim (X^4 - 3X^3 + X^2 - 3X + 4)(X^3 - 1) : (X - 1) = (X^4 - 3X^3 + X^2 - 3X + 4)(X^2 + X + 1) = X^6 - 2X^5 - X^4 - 5X^3 + 2X^2 + X + 4$.

# EXERCIȚII ȘI PROBLEME

## EXERSARE

**E1.** Să se arate că polinomul $f \in \mathbb{C}[X]$ se divide cu polinomul $g \in \mathbb{C}[X]$ și să se determine câtul împărțirii lui f la g:

a) $f = X^4 - X^3 + X^2 - X - 4$, $g = X + 1$;

b) $f = 2X^5 + X^4 - 3X^3 - 4X + 4$, $g = X - 1$;

c) $f = X^7 - X^4 - 3X + 3$, $g = (X-1)^2$;

d) $f = (2X^2 + X + 2)^2 + (2X^2 - X + 2)^2 - 2X^2$, $g = X^2 + 1$;

e) $f = X^5 + (X-1)^4$, $g = X^2 - X + 1$.

**E2.** Să se arate că polinomul $f \in \mathbb{Z}_p[X]$ se divide cu polinomul $g \in \mathbb{Z}_p[X]$, în cazurile:

a) $f = X^4 + X^2 + \hat{1}$, $g = X^2 + X - \hat{2}$, $p = 3$;

b) $f = X^4 + \hat{3}X^2 + \hat{4}X - \hat{1}$, $g = X + \hat{3}$, $p = 5$;

c) $f = X^6 + X^5 - \hat{3}X^4 - \hat{4}X^3 + X^2 - \hat{2}X + \hat{2}$, $g = X^2 + X - \hat{3}$, $p = 5$.

**E3.** Să se determine c.m.m.d.c. al polinoamelor $f, g \in K[X]$:

a) $f = X^2 - 2X$, $g = X^3 - 2X - 4$, $K = \mathbb{C}$;

b) $f = X^6 - 1$, $g = X^3 + X^2 + X + 1$, $K = \mathbb{Q}$;

c) $f = X^4 + 4X^3 + 3X^2 - 4X - 4$, $g = X^3 - 2X^2 - 5X + 6$, $K = \mathbb{R}$;

d) $f = X^4 - \hat{3}X^2 + \hat{2}$, $g = X^2 + \hat{4}$, $K = \mathbb{Z}_5$;

e) $f = X^6 + X^5 + \hat{2}X + \hat{2}$, $g = X^3 - X^2 + X + \hat{1}$, $K = \mathbb{Z}_3$.

**E4.** Să se determine parametrul $m \in K$ pentru care polinomul $f \in K[X]$ se divide cu polinomul $g \in K[X]$:

a) $f = X^3 + mX^2 + 4$, $g = X - 2$, $K = \mathbb{Q}$;

b) $f = X^4 + mX^3 + (m-1)$, $g = 2X + 3$, $K = \mathbb{R}$;

c) $f = X^4 + X^3 + mX + m$, $g = X + \hat{2}$, $K = \mathbb{Z}_3$;

d) $f = X^4 + (m + \hat{1})X + \hat{3}m + \hat{3}$, $g = X - \hat{3}$, $K = \mathbb{Z}_5$.

**E5.** Să se determine c.m.m.m.c. pentru polinoamele $f, g \in K[X]$:

a) $f = X^2 - 1$, $g = X^2 - X$, $K = \mathbb{Q}$;

b) $f = X^2 + 1$, $g = X^2 - iX$, $K = \mathbb{C}$;

c) $f = X^4 + X^2 + 1$, $g = X^3 + X^2 + X$, $K \in \mathbb{R}$;

d) $f = X^2 + X + \hat{1}$, $g = X^4 + \hat{2}$, $K = \mathbb{Z}_3$.

## APROFUNDARE

**A1.** Să se determine $a, b \in K$ pentru care polinomul $f \in K[X]$ se divide cu polinomul $g \in K[X]$, în cazurile:

a) $f = \hat{2}X^2 + aX + \hat{2}$, $g = X + a$, $K = \mathbb{Z}_3$;

b) $f = X^4 + X^3 + aX + \hat{1}$, $g = \hat{2}X + \hat{1}$, $K = \mathbb{Z}_5$;

c) $f = X^4 + X^3 + aX^2 + X + b$, $g = X^2 + \hat{1}$, $K = \mathbb{Z}_3$;

d) $f = X^5 + X^3 + aX^2 + \hat{1}$, $g = X^2 + a$, $K = \mathbb{Z}_3$;

e) $f = X^4 + aX^2 + \hat{1}$, $g = X^2 + bX + \hat{1}$, $K = \mathbb{Z}_3$.

**A2.** Fie $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^2 + 2X + m$. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ pentru care polinomul $g \in \mathbb{R}[X]$, $g = f(X^2 + 2X)$ se divide cu f.

*(Univ. Tehnică Cluj-Napoca, 2000)*

**A3.** Pentru $n \in \mathbb{N}^*$ se consideră polinoamele $f = X(X+1)^{2n+1} + (m-1)X^n \in \mathbb{R}[X]$, $g = X^2 + X + 1 \in \mathbb{R}[X]$. Dacă $M = \{m \in \mathbb{R} \mid f \text{ divizibil cu } g\}$ și $S = \sum_{m \in M} m^2$, atunci:

a) $S = 1$; b) $S = 2$; c) $S = 3$;
d) $S = 4$; e) $S = 5$.

*(ASE București, 2005)*

**A4.** Să se determine $m \in \mathbb{R}$ știind că polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^3 - 3mX^2 + 4(m^2+1)X - m^3 - 5$ se divide cu $g = X - 1 \in \mathbb{R}[X]$.

**A5.** Să se determine $a, b, c \in \mathbb{C}$, astfel încât polinomul $f \in \mathbb{C}[X]$ să se dividă cu $g \in \mathbb{C}[X]$:

a) $f = X^4 - 3X^3 + bX^2 + aX + b$, $g = X^2 - 1$;

b) $f = aX^3 + bX^2 - 73X + 102$, $g = X^2 - 5X + 6$;

c) $f = aX^3 + bX^2 - 37X + 14$, $g = X^2 + X - 2$;

d) $f = X^4 + aX^3 + iX^2 + b$, $g = X^2 - i$;

e) $f = X^4 + aX^3 - bX^2 - cX + 8$, $g = (X-1)(X^2 - bX + 8)$;

f) $f = X^5 - aX^4 - 2X^3 - bX^2 - 3X + c$, $g = X^3 + 1$.

**A6.** Să se determine polinoamele $f \in \mathbb{C}[X]$ de gradul 3, știind că se divid cu $X + 1$, iar la împărțirea cu $X - 2$, $X - 3$, $X - 4$ resturile sunt egale.

**A7.** Fie $f, g \in \mathbb{R}[X]$, $f = aX^3 + bX^2 + cX + d$, $g = 3aX^2 + 2bX + c$, $a \in \mathbb{R}_+^*$. Să se demonstreze că dacă polinomul f se divide cu g, atunci f și g sunt puteri ale unui polinom de grad 1.

**A8.** Fie $f, g \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^3 - 4X^2 + X + m$, $g = X^3 - 7X + m$. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ știind că $(f, g)$ este polinom de gradul 1.

**A9.** Se dau polinoamele $f, g \in \mathbb{Q}[X]$, $f = X^3 - X^2 + ax + b$, $g = X^3 + X^2 + X + 1$. Să se determine $a, b \in \mathbb{Q}$ pentru care polinomul $(f, g)$ are gradul 2 și să se afle apoi $[f, g]$.

**A10.** Fie $f, g \in \mathbb{Z}_3[X]$, $f = X^3 + X^2 + a$, $g = X^3 + X + \hat{2}$. Să se determine:

a) valorile lui $a \in \mathbb{Z}_3$ pentru care polinomul $(f, g)$ are gradul 1;

b) c.m.m.m.c.$(f, g)$ pentru „a" determinat.

**A11.** Să se arate că polinomul $f = (1 + X + X^2 + \ldots + X^n)^2 - X^n \in \mathbb{Q}[X]$ se divide cu $g = 1 + X + X^2 + \ldots + X^{n-1} \in \mathbb{Q}[X]$.

**A12.** Să se arate că polinomul $f \in \mathbb{C}[X]$ se divide cu $g \in \mathbb{C}[X]$, în cazurile:

a) $f = (X^2 + X + 1)^{4n+1} + (X^2 - X + 1)^{4n+1}$, $g = X^2 + 1$;

b) $f = (X-1)^{n+2} + X^{2n+1}$,
$g = X^2 - X + 1$;
c) $f = (X-1)^{2n+1} - (-X)^{n+2}$,
$g = X^2 - X + 1$;
d) $f = (X+1)^{3n+2} + X + 2$,
$g = X^2 + 3X + 3$.

**A13.** **Se consideră polinomul** $f = X^m + (X-1)^m + 1 \in \mathbb{R}[X]$. **Pentru ce valori** $m \in \mathbb{N}^*$ **polinomul f este divizibil cu** $g = X^2 - X + 1 \in \mathbb{R}[X]$?

**A14.** **Să se determine** $a, b \in \mathbb{C}$ **și produsul polinoamelor** $f, g \in \mathbb{C}[X]$ **știind că** $(f, g) = X^2 + 2X$ **și** $[f, g] = X^4 + aX^3 + 8X + b$.

**A15.** **Pentru care valori ale lui** $n \in \mathbb{N}^*$ **polinoamele** $f, g \in \mathbb{C}[X]$, $f = X + i$, $g = 1 + X + X^2 + ... + X^n$ **sunt prime între ele?**

**A16.** **Să se determine** $f, g \in \mathbb{R}[X]$, **știind că** $f(-1) = 3$, $g(0) = 1$ **și** $(f, g) = X^2 + 1$, $[f, g] = X^4 - 3X^3 + 3X^2 - 3X + 2$.

# 5 Descompunerea polinoamelor în factori ireductibili

## 5.1. Rădăcini ale polinoamelor

Fie $f \in K[X]$ un polinom nenul.

❖ **DEFINIȚIE**

• Elementul $\alpha \in K$ se numește **rădăcină** a polinomului $f \in K[X]$ dacă $f(\alpha) = 0$.

☞ ***Exemple***

- Polinomul de gradul 1, $f \in \mathbb{C}[X]$, $f = aX + b$, are rădăcina reprezentată de numărul complex $\alpha = -\frac{b}{a}$.
- Pentru polinomul de gradul 2, $f \in \mathbb{C}[X]$, $f = aX^2 + bX + c$, rădăcinile sunt date de formulele: $\alpha_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, dacă $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$, respectiv $\alpha_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$, dacă $\Delta < 0$.

Următoarea teoremă pune în evidență o legătură între rădăcinile unui polinom $f \in K[X]$ și divizibilitatea polinoamelor pe mulțimea $K[X]$.

**▣ TEOREMA 10 (E. Bezout)**

Fie $f, g \in K[X]$ și $\alpha \in K$. Atunci:

**a)** $\alpha$ este rădăcină a polinomului f dacă și numai dacă f se divide cu polinomul $X - \alpha \in K[X]$;

**b)** dacă f se divide cu polinomul nenul g și $\alpha$ este rădăcină a lui g, rezultă că $\alpha$ este rădăcină a lui f.

*Demonstrație*

**a)** Fie $\alpha \in K$ și $X - \alpha \in K[X]$. Din teorema împărțirii cu rest rezultă că există h și $r \in K[X]$ astfel încât $f = h \cdot (X - \alpha) + r$, $r \in K$, (1).

Din teorema restului rezultă că $r = f(\alpha)$ și relația (1) se scrie $f = (X - \alpha) \cdot h + f(\alpha)$, (2).

Din relația (2) rezultă că dacă $\alpha$ este rădăcină pentru f, atunci $f(\alpha) = 0$ și $f = (X - \alpha) \cdot h$, deci f se divide cu $X - \alpha$.

Reciproc, dacă f se divide cu $X - \alpha$, din relația (2) se obține că $f(\alpha) = 0$.

**b)** Dacă f se divide cu g, atunci există $h \in K[X]$, astfel încât $f = g \cdot h$. Rezultă că $f(\alpha) = g(\alpha) \cdot h(\alpha) = 0$, deci $\alpha$ este rădăcină a polinomului f. ■



*Etienne BEZOUT (1730-1783) matematician francez*

*A stabilit unele rezultate importante în teoria ecuațiilor algebrice și teoria numerelor.*

## *Problemă rezolvată*

☒ Fie $f, g \in \mathbb{C}[X]$, $f = X^3 + 3X^2 + aX + b$, $g = X^2 - 3X + 2$. Să se determine $a, b \in \mathbb{C}$ pentru care polinomul f se divide cu g. Să se afle apoi rădăcinile lui f.

*Soluție*

Rădăcinile polinomului g sunt date de ecuația $x^2 - 3x + 2 = 0$.

Se obține $x_1 = 2$, $x_2 = 1$.

Se impun condițiile $f(2) = 0$ și $f(1) = 0$.

Rezultă sistemul $\begin{cases} a + b = -4 \\ 2a + b = -20 \end{cases}$ cu soluția $\begin{cases} a = -16 \\ b = 12 \end{cases}$.

❑ **TEMĂ**

**Fie $f, g \in K[X]$, $f = X^4 + X^2 + aX + b$. Pentru ce valori ale lui $a, b \in K$, polinomul f se divide cu g, dacă:**

**a)** $g = X^2 - 1$, $K = \mathbb{R}$;

**b)** $g = X^2 - \hat{1}$, $K = \mathbb{Z}_3$;

**c)** $g = X^2 + 1$, $K = \mathbb{C}$?

Se obține $f = X^3 + 3X^2 - 16X + 12 = \left(X^2 - 3X + 2\right)(X + 6)$, iar rădăcinile lui f sunt $x_1 = 2,\ x_2 = 1,\ x_3 = -6$.

## 5.2. Rădăcini multiple ale unui polinom

❖ **DEFINIȚII**

- Fie $f \in K[X]$ un polinom nenul și $m \in \mathbb{N}^*$. Elementul $\alpha \in K$ se numește **rădăcină multiplă** de ordinul m dacă polinomul f se divide cu $(X - \alpha)^m$, dar nu se divide cu $(X - \alpha)^{m+1}$.
- Numărul m se numește **ordinul de multiplicitate** al rădăcinii $\alpha$.
- Dacă $m = 1$, rădăcina $\alpha$ se numește rădăcină **simplă**. Dacă $m = 2, 3, \ldots$ rădăcina $\alpha$ se numește rădăcină **dublă**, **triplă**, ... .

Așadar, dacă $\alpha \in K$ este rădăcină multiplă de ordinul m, polinomul f se poate scrie sub forma $f = (X - \alpha)^m \cdot g$, unde $g \in K[X]$ și $\tilde{g}(\alpha) \in K^*$.

### *Problemă rezolvată*

☒ Fie $f \in \mathbb{R}[X],\ f = X^3 + aX + b$. Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$, știind că $\alpha = 1$ este rădăcină dublă pentru f.

<u>*Soluția 1*</u> (metoda coeficienților nedeterminați):

Deoarece $\alpha = 1$ este rădăcină dublă, polinomul f se divide cu $(X - \alpha)^2$. Avem $f = (X - 1)^2 (X + c) = X^3 + X^2(c - 2) + X(1 - 2c) + c = X^3 + {}$ $+ aX + b$.

Folosind egalitatea polinoamelor, prin identificarea coeficienților monoamelor asemenea, rezultă: $c = 2,\ a = 1 - 2c,\ b = c$, deci $a = -3,\ b = 2$ și $f = (X - 1)^2 (X + 2)$. Rădăcinile lui f sunt $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ și $\alpha_3 = -2$.

<u>*Soluția 2*</u>

Dacă $\alpha = 1$ este rădăcină dublă a polinomului f, atunci f se divide cu $(X - 1)^2$. Efectuăm prin schema lui Horner împărțirea polinomului f cu $X - 1$ și a câtului rezultat cu $X - 1$. Avem:

| | 1 | 0 | a | b |
|---|---|---|---|---|
| $\alpha = 1$ | 1 | 1 | $a + 1$ | $a + b + 1 = r_1$ |
| $\alpha = 1$ | 1 | 2 | $a + 3 = r_2$ | |

Resturile sunt $r_1 = a + b + 1$ și $r_2 = a + 3$. Punând condiția $r_1 = r_2 = 0$, se obține $a = -3$ și $b = 2$.

➲ **OBSERVAȚIE**

- Considerând funcția polinomială asociată lui f, $\alpha = 1$ este rădăcină dublă dacă $\tilde{f}(1) = 0$ și $\tilde{f}'(1) = 0$. Cu această observație se obține $\tilde{f}'(1) = 1 + a + b = 0$ și $\tilde{f}'(1) = 3 + a = 0$, cu soluțiile $a = -3$, $b = 2$.

❑ **TEMĂ**

**Pentru ce valori $a \in \mathbb{R}$ polinomul $f = X^3 + 3X^2 + aX + b \in \mathbb{R}[X]$ are rădăcină dublă $\alpha = -1$? Dar triplă?**

## 5.3. Ecuații algebrice

Fie $(K, +, \cdot)$ un corp comutativ și $f \in K[X]$ un polinom de gradul n, $n \in \mathbb{N}^*$.

❖ **DEFINIȚIE**

- O ecuație de forma $f(x) = 0$ se numește **ecuație algebrică de gradul n** cu coeficienți în K și necunoscuta x.

Dacă $f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + ... + a_nX^n \in K[X]$, ecuația algebrică de gradul n are forma $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0 = 0$, (1).

Numerele $a_0, a_1, ..., a_n \in K$ se numesc **coeficienții ecuației**, iar n se numește **gradul ecuației**.

Elementul $\alpha \in K$ cu proprietatea că $f(\alpha) = 0$ se numește **soluție** a ecuației.

În legătură cu ecuațiile algebrice sunt studiate câteva probleme importante.

**1.** Existența soluțiilor în corpul K.

**2.** Numărul soluțiilor ecuației în corpul K.

**3.** Existența unor formule generale de rezolvare a ecuațiilor algebrice de diferite grade.

În cazul corpului $\mathbb{C}$ al numerelor complexe au fost demonstrate câteva proprietăți generale care rezolvă cele trei probleme puse.

**▣ TEOREMA 11 (teorema fundamentală a algebrei)**

O ecuație algebrică de grad cel puțin 1 cu coeficienți complecși admite cel puțin o soluție complexă.

Această teoremă a fost dată de către matematicienii J. L. D'Alembert și C. Gauss.

Problema 3 a fost rezolvată de matematicienii N. Abel și A. Ruffini.

**▣ TEOREMA 12 (Abel-Ruffini)**

Fie $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$, $a_n \neq 0$ o ecuație algebrică de grad $n \geq 5$, cu coeficienți în $\mathbb{C}$. Atunci nu există o formulă generală de rezolvare a acestei ecuații în care să apară numai coeficienții $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$.



*Niels Heinrik ABEL*
*(1802-1829)*
*matematician norvegian*

*A adus contribuții importante în teoria ecuațiilor algebrice, teoria calculului diferențial și integral.*

➲ **OBSERVAȚII**

- Din teorema fundamentală a algebrei rezultă că o ecuație algebrică de gradul $n \in \mathbb{N}^*$ cu coeficienți complecși are exact n soluții complexe.
- Deoarece polinomul $f \in \mathbb{C}[X]$, de gradul $n \in \mathbb{N}^*$, are exact n rădăcini complexe, rezultă că el nu poate lua valoarea zero decât de n ori. Astfel, dacă polinomul se anulează de mai mult de n ori, atunci el este polinom nul.

## *Problemă rezolvată*

☒ Fie $f \in \mathbb{C}[X]$, cu proprietatea că $f(\alpha) = f(\alpha+1)$, $\forall\ \alpha \in \mathbb{C}$. Să se arate că f este polinom constant.

*Soluție*

Pentru $\alpha = 0, 1, 2, \ldots$, se obține că $f(0) = f(1) = f(2) = \ldots$ .

Notăm $a = f(0) = f(1) = \ldots$ valoarea comună și fie $g = f - \alpha \in \mathbb{C}[X]$. Atunci $0 = g(0) = g(1) = g(2) = \ldots$, deci polinomul g are o infinitate de rădăcini. Rezultă că el este polinom nul și astfel $f = \alpha \in \mathbb{C}$.

## 5.4. Polinoame ireductibile în $K[X]$

Fie $(K, +, \cdot)$ un corp comutativ.

### ❖ DEFINIȚII

- Polinomul nenul $f \in K[X]$ se numește **reductibil peste corpul K** dacă există polinoamele $g, h \in K[X]$ de grad cel puțin 1, astfel încât $f = g \cdot h$.
- Un polinom $f \in K[X]$ cu $grad(f) \geq 1$, care nu este reductibil peste K, se numește **ireductibil** peste K.

### ➲ OBSERVAȚII

**1.** Orice polinom de gradul 1 din $K[X]$ este polinom ireductibil peste K.

**2.** Dacă un polinom $f \in K[X]$, de grad cel puțin 2 este ireductibil peste K, atunci el nu are rădăcini în K.
Într-adevăr, dacă f ar avea elementul $\alpha \in K$ rădăcină, atunci f se divide cu $X - \alpha$ și am putea scrie $f = (X - \alpha) \cdot g$, deci f nu ar fi ireductibil.

**3.** Dacă polinomul $f \in K[X]$ are gradul 2 sau 3 și nu admite rădăcini în K, atunci el este polinom ireductibil peste K.
Într-adevăr, dacă f ar fi reductibil peste K, atunci el s-ar scrie sub forma $f = g \cdot h$, unde g sau h ar avea gradul 1. Dacă $g = aX + b$, atunci $g(-ba^{-1}) = 0$ și se contrazice ipoteza că f nu are rădăcini în K.

☞ ***Exemple***

- Polinomul $f = X^2 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$ este ireductibil peste $\mathbb{Q}$. Dacă f ar fi reductibil peste $\mathbb{Q}$, atunci el ar avea o rădăcină $\alpha \in \mathbb{Q}$. Dar $f(\alpha) = 0$ conduce la $\alpha^2 = 2$, deci $\alpha \in \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$ ceea ce nu se poate.
- Polinomul $f = X^2 - 2 \in \mathbb{R}[X]$ este reductibil peste $\mathbb{R}$ deoarece $f = (X - \sqrt{2})(X + \sqrt{2})$.
- Polinomul $f \in \mathbb{Z}_3[X], f = X^3 - \hat{2}$ este reductibil peste $\mathbb{Z}_3$ deoarece $f(\hat{2}) = \hat{0}$ și $f = (X - \hat{2})^3$, dar este ireductibil peste $\mathbb{Z}_7$, deoarece $f(a) \neq \hat{0}, \forall a \in \mathbb{Z}_7$.

După cum s-a observat din exemplele anterioare, descompunerea în factori ireductibili depinde de corpul K în care polinomul are coeficienții.

**Cazul $K = \mathbb{C}$**

Fie $f \in \mathbb{C}[X]$ un polinom nenul de grad n, $n \in \mathbb{N}^*$. Dacă $n \geq 2$, din teorema fundamentală a algebrei rezultă că f are cel puțin o rădăcină $\alpha \in \mathbb{C}$, iar din teorema lui Bezout se obține că f se divide cu polinomul $g = X - \alpha \in \mathbb{C}[X]$. Așadar f nu este ireductibil pentru $n \geq 2$.

În concluzie, un polinom nenul $f \in \mathbb{C}[X]$ este ireductibil peste $\mathbb{C}$ dacă și numai dacă are gradul 1.

**Cazul $K = \mathbb{R}$**

Dacă $f \in \mathbb{R}[X]$ este un polinom nenul, el este ireductibil numai în următoarele două cazuri:

- f are gradul 1;
- f are gradul 2 și nu are rădăcini reale.

Rezultă că orice polinom $f \in \mathbb{R}[X]$ de grad n, $n \geq 3$, este polinom reductibil peste $\mathbb{R}$, deci el se poate scrie ca produs de polinoame de grad cel puțin 1.

**Cazul $K = \mathbb{Q}$ și $K = \mathbb{Z}_p$, p prim**

În inelele de polinoame $\mathbb{Q}[X]$ și $\mathbb{Z}_p[X]$ există polinoame ireductibile de orice grad n, $n \in \mathbb{N}^*$. De exemplu $f = X^n - 2 \in \mathbb{Q}[X]$ este ireductibil peste $\mathbb{Q}$.

## 5.5. Descompunerea polinoamelor în factori ireductibili

**▣ TEOREMA 13**

Fie K un corp comutativ și $f \in K[X]$ un polinom de grad $n \in \mathbb{N}^*$.
Au loc următoarele rezultate:
**a)** Polinomul f se descompune într-un produs finit de polinoame ireductibile peste K.
**b)** Dacă $f = f_1 \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_m = g_1 \cdot g_2 \cdot \ldots \cdot g_k$ sunt două descompuneri în produs de polinoame ireductibile ale lui f, atunci $m = k$ și există o permutare $\sigma \in S_m$ cu proprietatea că $f_i \sim g_{\sigma(i)}$, $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$.

*Demonstrație*

**a)** Folosim inducția matematică.

Dacă $n = 1$, atunci f este ireductibil peste K și afirmația este adevărată.

Presupunem $n > 1$ și că afirmația este adevărată pentru polinoame de grad mai mic decât n. Dacă f este ireductibil peste K,

atunci demonstrația este încheiată. În caz contrar, există $g, h \in K[X]$ astfel încât $f = g \cdot h$ și $grad(g) < n$, $grad(h) < n$. Din ipoteza de inducție, polinoamele g și h se scriu ca produs finit de polinoame ireductibile peste K, deci $f = g \cdot h$ este produs de polinoame ireductibile peste K.

**b)** Demonstrația rămâne temă. ■

Teorema anterioară demonstrează numai existența și unicitatea descompunerii în produs de polinoame ireductibile, dar nu oferă și o modalitate concretă de găsire a acesteia.

În cazul inelului $\mathbb{C}[X]$ există o legătură directă între descompunerea în factori ireductibili și rădăcinile polinomului.

**▣ TEOREMA 14**

Fie $f \in \mathbb{C}[X]$, $f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \ldots + a_nX^n$ un polinom de grad $n \in \mathbb{N}^*$.

**a)** Dacă $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ sunt rădăcinile polinomului, atunci: $f = a_n(X - \alpha_1)(X - \alpha_2)\ldots(X - \alpha_n)$.

**b)** Dacă $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{C}$ sunt rădăcinile distincte ale polinomului f, cu multiplicitățile $m_1, m_2, \ldots, m_k \in \mathbb{N}^*$, atunci: $f = a_n(X - \alpha_1)^{m_1}(X - \alpha_2)^{m_2}\ldots(X - \alpha_k)^{m_k}$.

*Demonstrație*

**a)** Dacă $\alpha_1 \in \mathbb{C}$ este rădăcină a lui f, atunci f se divide cu $X - \alpha_1$, deci există $g \in \mathbb{C}[X]$ astfel încât $f = (X - \alpha_1)g$.

Deoarece $\alpha_2$ este rădăcină a polinomului f, se observă ușor că trebuie să fie rădăcină pentru g. Așadar g se divide cu $X - \alpha_2$.

Rezultă că există $g_1 \in \mathbb{C}[X]$ cu proprietatea că $g = (X - \alpha_2)g_1$, iar $f = (X - \alpha_1)(X - \alpha_2)g_1$.

Se continuă raționamentul pentru $\alpha_3$ și $g_1, \alpha_4$ și $g_2$ etc., și se obține în final descompunerea dorită.

**b)** Demonstrația rămâne temă. ■

Dacă $f \in \mathbb{R}[X]$, atunci f poate fi privit și ca element al inelului $\mathbb{C}[X]$, deci el va avea rădăcinile complexe $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$.

Fie $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k \in \mathbb{R}$ rădăcinile reale ale lui f. Atunci f se divide în $\mathbb{R}[X]$ cu polinomul $g = (X-\alpha_1)^{m_1}(X-\alpha_2)^{m_2}...(X-\alpha_k)^{m_k}$, unde $m_1$, $m_2, ..., m_k \in \mathbb{N}^*$ sunt multiplicitățile rădăcinilor $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$. Rezultă că f se scrie sub forma $f = g \cdot h$, unde $h \in \mathbb{R}[X]$ și h nu are rădăcini reale, ci numai rădăcini $z_k = a_k + b_k i \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Dar, se observă ușor că dacă $h(z_k) = 0$, atunci și $h(\overline{z_k}) = 0$ și astfel polinomul h se divide cu $h_k = (X - z_k)(X - \overline{z_k}) = X^2 - 2a_k X + a_k^2 + b_k^2 \in \mathbb{R}[X]$.

În concluzie, polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$ va avea următoarea descompunere în polinoame ireductibile:

$$f = a_n (X-\alpha_1)^{m_1}...(X-\alpha_k)^{m_k}\left(X^2 + a_1 X + b_1\right)^{n_1}...\left(X^2 + a_p X + b_p\right)^{n_p},$$

unde $m_1, m_2, ..., m_k, n_1, n_2, ..., n_p \in \mathbb{N}^*$ și $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k \in \mathbb{R}$ sunt rădăcinile reale ale lui f, iar polinoamele $X^2 + a_s X + b_s$, $s = \{1, 2, ..., p\}$ nu au rădăcini reale.

## *Probleme rezolvate*

☒ **1.** Să se descompună în factori ireductibili peste corpurile $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, polinoamele:

**a)** $f = X^4 + X^2 + 1$; **b)** $f = X^5 + X^4 - X^3 - X^2 - 2X - 2$.

<u>*Soluție*</u>

**a)** Avem $f = X^4 + 2X^2 + 1 - X^2 = \left(X^2+1\right)^2 - X^2 = \left(X^2 + X + 1\right)\left(X^2 - X + 1\right)$. Aceasta este descompunerea lui f în factori ireductibili peste $\mathbb{Q}$ și $\mathbb{R}$. Peste corpul $\mathbb{C}$ f are descompunerea $f = (X-\varepsilon)\left(X-\varepsilon^2\right)(X-\varepsilon_1)(X-\varepsilon_2)$, unde $\varepsilon$ este o rădăcină a polinomului $X^2 + X + 1$, iar $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ sunt rădăcinile polinomului $X^2 - X + 1$.

**b)** Se observă că $f(-1) = 0$, deci f se divide cu $X+1$.

Folosind schema lui Horner se obține:

$f = (X+1)\left(X^4 - X^2 - 2\right) = (X+1)\left(X^2+1\right)\left(X^2-2\right)$.

Rezultă că f are următoarele descompuneri:

- $f = (X+1)\left(X^2+1\right)\left(X^2-2\right)$ peste $\mathbb{Q}$;
- $f = (X+1)\left(X^2+1\right)\left(X-\sqrt{2}\right)\left(X+\sqrt{2}\right)$ peste $\mathbb{R}$;
- $f = (X+1)(X-i)(X+i)\left(X-\sqrt{2}\right)\left(X+\sqrt{2}\right)$ peste $\mathbb{C}$.

☒ **2.** Să se determine c.m.m.d.c. și c.m.m.m.c. pentru polinoamele: $f, g \in \mathbb{Q}[X]$, $f = (X-1)(X^2-1)(X+2)^2$, $g = (X^2-3X+2)(X^2-4)$.

*Soluție*

Vom descompune în factori ireductibili cele două polinoame.

Avem $f = (X-1)^2(X+1)(X+2)^2$ și $g = (X-1)(X-2)(X-2)(X+2) = (X-1)(X-2)^2(X+2)$.

Folosind descompunerile în factori ireductibili se obține:

$(f, g) = (X-1)(X+2)$ (se aleg factorii ireductibili comuni la puterea cea mai mică), iar $[f, g] = (X-1)^2(X+1)(X-2)^2(X+2)^2$ (se aleg factorii comuni și necomuni la puterea cea mai mare).

**REȚINEM!**

Dacă polinoamele $f, g \in K[X]$ sunt descompuse în produse de factori ireductibili, atunci:

- $(f, g)$ este produsul factorilor ireductibili comuni, luați la puterea cea mai mică;
- $[f, g]$ este produsul factorilor ireductibili comuni sau necomuni, luați la puterea cea mai mare.

## EXERCIȚII ȘI PROBLEME

### EXERSARE

**E1. Să se determine care dintre elementele specificate sunt rădăcini ale polinomului f:**

**a)** $f = X^3 - 3X^2 + 2 \in \mathbb{C}[X]$, $\alpha \in \{1, i, 1+\sqrt{3}\}$;

**b)** $f = X^5 - X^4 + X^3 + X^2 - X + 1 \in \mathbb{C}[X]$, $\alpha \in \left\{-1, \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right\}$;

**c)** $f = X^6 + \hat{6} \in \mathbb{Z}_7[X]$, $\alpha \in \{\hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}, \hat{5}, \hat{6}\}$.

**E2. Să se determine pentru polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$ rădăcinile și ordinul de multiplicitate al acestora:**

**a)** $f = X^2(X-1)^3(2X-1)^4$;

**b)** $f = X^2(X^2-X)^3(X^2-1)^2$;

**c)** $f = (X^2-X-2)^2(2X^2-3X+1)^3 \cdot (X^2-1)^2$.

**E3. Să se determine $a, b \in \mathbb{Z}_p$ astfel încât polinomul $f \in \mathbb{Z}_p[X]$ să admită rădăcinile indicate și să se afle apoi celelalte rădăcini ale lui f:**

**a)** $f = X^3 + X^2 + a$, $p = 3$, $\alpha = \hat{2}$;

**b)** $f = X^4 + aX^2 + \hat{1}$, $p = 5$, $\alpha = \hat{3}$;

**c)** $f = X^4 + \hat{2}X^2 + aX + b$, $p = 3$, $\alpha \in \{\hat{1}, \hat{2}\}$.

**E4.** Să se arate că polinomul $f \in K[X]$ admite rădăcina dublă indicată și apoi să se afle celelalte rădăcini ale lui f:

a) $f = X^3 - 3X + 2$, $K = \mathbb{Q}$, $\alpha = 1$;

b) $f = X^4 - 6X^3 + 13X^2 - 12X + 4$, $K = \mathbb{Q}$, $\alpha = 2$;

c) $f = X^4 - 2iX^3 - 5X^2 + 8iX + 4$, $K = \mathbb{C}$, $\alpha = i$;

d) $f = X^4 - X^3 + \hat{3}X^2 - \hat{2}X + \hat{4}$, $K = \mathbb{Z}_5$, $\alpha = \hat{2}$.

**E5.** Să se descompună în factori ireductibili polinoamele:

a) $f = X^4 - 3X^3 + 2X^2 \in \mathbb{R}[X]$;

b) $f = X^6 - 1 \in \mathbb{C}[X]$;

c) $f = X^5 - X \in \mathbb{C}[X]$;

d) $f = X^4 + 3X^2 + 4 \in \mathbb{C}[X]$;

e) $f = X^2 + \hat{1} \in \mathbb{Z}_2[X]$;

f) $f = X^3 + \hat{4}X^2 + \hat{2} \in \mathbb{Z}_7[X]$;

g) $f = X^3 + X^2 + X + \hat{1} \in \mathbb{Z}_3[X]$.

**E6.** Fie $f \in \mathbb{C}[X]$, $f = X^4 + (m+n)X^3 - X^2 + mX + n - 1$. Să se determine rădăcinile polinomului f, știind că $\alpha_1 = -1$ și $\alpha_2 = -2$ sunt rădăcini ale acestuia.

**E7.** Să se determine c.m.m.d.c. și c.m.m.m.c. al polinoamelor:

a) $f = (X-1)^3(X+1)^4(X-2)(X+3)$, $g = (X^2-1)^2(X+1)^5(X^2-4)$, $f, g \in \mathbb{Q}[X]$;

b) $f = (X-i)^3(X+i)^2(X+1)^2$, $g = (X^2+1)^2(X^2-1)$, $f, g \in \mathbb{C}[X]$;

c) $f = X^6 - 1$, $g = X^9 - 1$, $f, g \in \mathbb{R}[X]$.

## APROFUNDARE

**A1.** Să se determine rădăcinile polinomului f în condițiile date:

a) $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = (2+\sqrt{3})X^3 + 3X^2 + (1+2\sqrt{3})X + 3\sqrt{3}$, știind că are o rădăcină rațională;

b) $f \in \mathbb{C}[X]$, $f = 2X^3 + (i+5)X^2 - 2iX + 3(-1-i)$, știind că are o rădăcină reală;

c) $f \in \mathbb{C}[X]$, $f = (1+2i)X^2 + (2m-i)X - (3+mi)$, dacă $m \in \mathbb{R}$ și f are o rădăcină reală;

d) $f \in \mathbb{C}[X]$, $f = X^3 + (3+i)X^2 - 3X - m - i$, dacă $m \in \mathbb{R}$ și f are o rădăcină reală.

**A2.** Să se determine $a \in \mathbb{C}$ știind că polinomul $f \in \mathbb{C}[X]$ admite rădăcini reale duble:

a) $f = (X-1)(X+2)(X-a)$;

b) $f = (X+1)(X-3)(X-a)(X-6a)$;

c) $f = (X^2-1)^2 - (X^2+a)^2$.

**A3.** Să se rezolve ecuațiile în $\mathbb{C}$ știind că au soluțiile indicate:

a) $x^3 - 3x^2 + x + 2 = 0$, $x_1 = 2$;

b) $x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 2x + 3 = 0$, $x_1 = i$, $x_2 = -i$;

c) $z^4 - 3z^3 + z^2 + 4 = 0$, $z_1 = 2$ soluție dublă;

d) $z^5 - z^4 - 4z^2 + 7z - 3 = 0$, $z_1 = 1$ soluție triplă.

**A4.** Să se determine $m \in \mathbb{R}$ pentru care polinomul $f \in \mathbb{C}[X]$, $f = X^4 - mX^3 + X^2 + m + 1$ are rădăcină

dublă $\alpha = 2$. Să se afle apoi celelalte rădăcini ale polinomului.

**A5.** Să se afle rădăcinile polinomului $f \in \mathbb{C}[X]$, $f = X^5 - X^4 + aX^3 + bX + c$ știind că are rădăcina triplă $\alpha = 1$.

**A6.** Să se determine $a \in \mathbb{R}$ știind că polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$ are rădăcină reală dublă:

a) $f = X^3 - 5X^2 + 8X + a$;

b) $f = X^3 - 2X^2 + aX + 8$;

c) $f = X^3 + aX^2 + 7X - 3$.

**A7.** Să se determine parametrii știind că polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$ are o rădăcină triplă. Să se descompună apoi în factori ireductibili polinomul f:

a) $f = X^3 - 6X^2 + aX + b$;

b) $f = X^3 + aX^2 + 3X + b$;

c) $f = X^4 - 5X^3 + 9X^2 + bX + a$.

**A8.** Să se determine $a \in \mathbb{Z}_3$ pentru care polinomul $f \in \mathbb{Z}_3[X]$, $f = X^3 + aX^2 + \left(a + \hat{2}\right)X + a$ are trei rădăcini în $\mathbb{Z}_3$.

**A9.** Se consideră polinomul $f = X^{2n} - 4X^{n+1} + 5X^n - 4X + 4 \in \mathbb{R}[X]$. Dacă $\alpha = 2$ este rădăcină a lui f, să se determine ordinul său de multiplicitate.

**A10.** Să se determine $f \in \mathbb{Z}_p[X]$ de gradul 4, știind că $x = \hat{2}$ este rădăcină triplă în cazurile $p \in \{2, 3\}$.

**A11.** Să se determine polinoamele ireductibile $f \in \mathbb{Z}_3[X]$, $f = aX^3 + bX + \hat{2}$.

**A12.** Să se determine polinoamele de gradul 4 ireductibile în $\mathbb{Z}_2[X]$.

**A13.** Să se afle valoarea parametrului „a" pentru care polinomul $f \in \mathbb{Z}_p[X]$ este ireductibil:

a) $f = \hat{2}X^3 + \left(a + \hat{2}\right)X + \hat{1}$, $p = 3$;

b) $f = X^6 + aX + \hat{5}$, $p = 7$;

c) $f = X^4 + aX^2 + \left(a + \hat{1}\right)X + \hat{2}$, $p = 5$.

**A14.** Să se descompună în factori ireductibili polinoamele:

a) $f = X^8 + X^4 + 1 \in \mathbb{Q}[X]$;

b) $f = X^8 - \hat{1}, \in \mathbb{Z}_2[X]$;

c) $f = X^9 - \hat{1} \in \mathbb{Z}_3[X]$.

**A15.** Fie $f = X^3 + bX^2 + cX + a \in \mathbb{Q}[X]$, astfel încât $a, b, c \in \mathbb{Z}$ și $ab + ac$ este număr impar. Să se arate că f este ireductibil peste $\mathbb{Z}$.

**A16.** Să se arate că polinomul: $f = (X-1)(X-2)(X-3) - 1 \in \mathbb{Q}[X]$ este polinom ireductibil peste $\mathbb{Z}$.

**A17.** Fie p număr prim. Să se descompună în factori ireductibili polinomul $f = X^p + a \in \mathbb{Z}_p[X]$.

**A18.** Să se arate că polinomul $f \in \mathbb{Q}[X]$, $f = (X-1)^2(X-2)^2 \cdot \ldots \cdot (X-n)^n + 1$ este ireductibil peste $\mathbb{Z}$.

**A19.** Se consideră polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$ astfel încât $\tilde{f}(1) + \tilde{f}(2) + \ldots + \tilde{f}(n) = n^3$, $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$. Să se determine rădăcinile polinomului f și să se descompună în factori ireductibili peste $\mathbb{R}$.

**A20.** Să se determine $f \in \mathbb{R}[X]$ și să se descompună în factori, știind că $(x+3)\tilde{f}(x) = (x-1)\tilde{f}(x+1)$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$.

**A21.** **Fie $f \in \mathbb{Z}_5[X]$, $f = X^4 + mX^3 + \hat{2}X^2 + \hat{4}X + \hat{1}$. Dacă $A = \{m \in \mathbb{Z}_5 \mid$ f are două rădăcini distincte în $\mathbb{Z}_5\}$ și $B = \{m \in \mathbb{Z}_5 \mid g = f + \hat{3}X + \hat{4}$ are rădăcină triplă în $\mathbb{Z}_5\}$ atunci:**

**i) a)** $A \subset \{\hat{0}, \hat{1}\}$; **b)** $A \subset \{\hat{1}, \hat{4}\}$; **c)** $A \subset \{\hat{1}, \hat{2}\}$; **d)** $A \subset \{\hat{2}, \hat{3}\}$; **e)** $A \subset \{\hat{0}, \hat{3}\}$.

**ii) a)** $B = \{\hat{1}\}$; **b)** $B = \{\hat{1}, \hat{4}\}$; **c)** $B = \{\hat{2}, \hat{3}\}$; **d)** $B = \{\hat{1}, \hat{2}\}$; **e)** $B = \{\hat{4}\}$.

***(ASE, București, iulie, 2000)***

## 6 Relațiile lui Viète

Fie $f \in \mathbb{C}[X]$, $f = a_0X^2 + a_1X + a_2$ un polinom de gradul al doilea. Dacă $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ sunt rădăcinile polinomului f, atunci acesta are descompunerea în factori ireductibili:

$f = a_0(X - z_1)(X - z_2)$, (1).

Efectuând produsul în relația (1) obținem că:

$f = a_0X^2 - a_0(z_1 + z_2)X + a_0z_1z_2$, (2).

Din identificarea celor două exprimări ale polinomului f obținem relațiile între rădăcinile și coeficienții acestuia:

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = -\dfrac{a_1}{a_0} \\ z_1 \cdot z_2 = \dfrac{a_2}{a_0} \end{cases},$$

**(relațiile lui Viète pentru polinomul de gradul 2)**.

În mod analog, pentru un polinom de gradul trei, $f \in \mathbb{C}[X]$, $f = a_0X^3 + a_1X^2 + a_2X + a_3$, avem descompunerea în factori ireductibili $f = a_0(X - z_1)(X - z_2)(X - z_3)$, unde $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ sunt rădăcinile polinomului.

Din egalitatea $a_0X^3 + a_1X^2 + a_2X + a_3 = a_0(X - z_1)(X - z_2)(X - z_3)$ se obține că $a_0X^3 + a_1X^2 + a_2X + a_3 = a_0X^3 - a_0(z_1 + z_2 + z_3)X^2 + a_0(z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3)X - a_0z_1z_2z_3$, (3).

Din identificarea coeficienților se obțin relațiile:

$$\begin{cases} z_1+z_2+z_3=-\dfrac{a_1}{a_0} \\ z_1z_2+z_1z_3+z_2z_3=\dfrac{a_2}{a_0}, \\ z_1z_2z_3=-\dfrac{a_3}{a_0} \end{cases}$$ numite **relațiile lui Viète pentru polinomul de gradul 3**.



*François VIÈTE (1540-1603) matematician francez*

*Este unul dintre creatorii algebrei având rezultate importante în domeniul trigonometriei și geometriei analitice.*

Mai general, procedând în mod analog pentru un polinom $f\in\mathbb{C}[X]$, $f=a_0X^n+a_1X^{n-1}+\ldots+a_{n-1}X+a_n,\ a_0\in\mathbb{C}^*$, cu rădăcinile $z_1, z_2, \ldots, z_n\in\mathbb{C}$, se obțin relațiile lui Viète:

$$(S)\begin{cases} s_1=z_1+z_2+\ldots+z_n=-\dfrac{a_1}{a_0} \\ s_2=z_1z_2+z_1z_3+\ldots+z_1z_n+z_2z_3+\ldots+z_{n-1}z_n=\dfrac{a_2}{a_0} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ s_k=z_1z_2\ldots z_k+z_1z_3\ldots z_{k+1}+\ldots+z_{n-k+1}\cdot\ldots\cdot z_{n-1}\cdot z_n=(-1)^k\dfrac{a_k}{a_0} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ s_n=z_1z_2\ldots z_n=(-1)^n\dfrac{a_n}{a_0} \end{cases}.$$

După cum se observă, suma $s_k$ este suma tuturor produselor a k dintre rădăcinile polinomului f. Rezultă că suma $s_k$ are $C_n^k$ termeni.

## ➲ OBSERVAȚII

**1.** Pentru ecuația algebrică $\tilde{f}(x)=0$ soluțiile $z_1, z_2, \ldots, z_n$ sunt rădăcinile polinomului f și, astfel, ele verifică același sistem de relații ale lui Viète.

**2.** Relațiile lui Viète se pot scrie pentru un polinom $f\in K[X]$, de gradul $n\in\mathbb{N}^*$, care are toate cele n rădăcini $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ în corpul K. În caz contrar, nu se pot scrie relațiile lui Viète.

Astfel, polinomul $f\in\mathbb{Q}[X],\ f=X^n-2,\ n\geq 2,$ nu are nici o rădăcină în $\mathbb{Q}$, deci nu putem scrie sistemul $(S)$ de relații ale lui Viète.

## Aplicații ale relațiilor lui Viète

**1.** Relațiile lui Viète se dovedesc utile în aflarea rădăcinilor unui polinom $f \in \mathbb{C}[X]$, în cazul când aceste rădăcini verifică relații suplimentare.

### Problemă rezolvată

☒ Să se rezolve în $\mathbb{C}$ ecuația $z^3 - z^2 - z - 2 = 0$, știind că două dintre soluțiile sale verifică relația $z_1 + z_2 = -1$.

<u>Soluție</u>

Din prima relație a lui Viète, $z_1 + z_2 + z_3 = 1$, se obține $z_3 = 1 - z_1 - z_2 = 1 - (z_1 + z_2) = 2$. Considerând polinomul $f \in \mathbb{C}[X]$, $f = X^3 - X^2 - X - 2$, care are rădăcina 2, obținem cu ajutorul schemei lui Horner descompunerea:

$$f = (X - 2)(X^2 + X + 1).$$

Rezultă că ecuația algebrică atașată se scrie sub forma:

$(z - 2)(z^2 + z + 1) = 0$ și are soluțiile $z_3 = 2$, $z_{1,2} = \dfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$.

**2.** Dacă sunt cunoscute soluțiile unei ecuații algebrice de gradul $n \in \mathbb{N}^*$, $z_1, z_2, \ldots, z_n$, atunci se cunosc sumele $s_1, s_2, \ldots, s_n$ și ecuația se poate scrie sub forma:

$$z^n - s_1 z^{n-1} + s_2 z^{n-2} - \ldots + (-1)^n s_n = 0, \ (1).$$

### Probleme rezolvate

☒ **1.** Să se scrie ecuația de gradul 3 cu coeficienți complecși, care are soluțiile $z_1 = 1$, $z_2 = i$, $z_3 = 1 - i$.

<u>Soluție</u>

Avem $s_1 = z_1 + z_2 + z_3 = 2$, $s_2 = z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_1 z_3 = 2 + i$, $s_3 = z_1 z_2 z_3 = 1 + i$. Având în vedere relația (1), obținem ecuația:

$$z^3 - 2z^2 + (2 + i)z - (1 + i) = 0.$$

☒ **2.** Fie $f \in \mathbb{C}[X]$, $f = X^3 + X + 1$ cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$. Să se scrie polinomul unitar de gradul 3 care are rădăcinile:

$y_1 = 1 + x_1$, $y_2 = 1 + x_2$, $y_3 = 1 + x_3$.

*Soluția 1*

Polinomul căutat este $g = X^3 - s_1'X^2 + s_2'X - s_3'$, unde:

$s_1' = y_1 + y_1 + y_3 = 3 + (x_1 + x_2 + x_3) = 3 + s_1$

$s_2' = y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3 = (1+x_1)(1+x_2) + (1+x_1)(1+x_3) + (1+x_2)\cdot$
$\cdot(1+x_3) = 3 + 2(x_1 + x_2 + x_3) + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 3 + 2s_1 + s_2$

$s_3' = y_1y_2y_3 = (1+x_1)(1+x_2)(1+x_3) = 1 + (x_1 + x_2 + x_3) +$
$+(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) + x_1x_2x_3 = 1 + s_1 + s_2 + s_3$, unde $s_1, s_2, s_3$ sunt date de relațiile lui Viète pentru polinomul f.

Rezultă $s_1 = 0, s_2 = 1, s_3 = -1$ și se obține $s_1' = 3, s_2' = 4, s_3' = 1$.

Polinomul căutat este $g = X^3 - 3X^2 + 4X - 1$.

*Soluția 2*

Din relațiile date se obține:

$x_1 = y_1 - 1, x_2 = y_2 - 1, x_3 = y_3 - 1$.

Cu substituția $x = y - 1$, ecuația $f(x) = 0$ atașată polinomului f se transformă astfel: $(y-1)^3 + (y-1) + 1 = 0$, care adusă la forma cea mai simplă devine: $y^3 - 3y^2 + 4y - 1 = 0$. Rezultă că polinomul g care are atașată această ecuație este $g = X^3 - 3X^2 + 4X - 1$.

☒ **3.** Să se rezolve în $\mathbb{C}$ sistemele de ecuații:

**a)** $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 3 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 1 \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} x + ay + a^2z = a^3 \\ x + by + b^2z = b^3 \\ x + cy + c^2z = c^3 \end{cases}$, a, b, $c \in \mathbb{C}$ distincte.

*Soluție*

**a)** Considerăm numerele $x, y, z \in \mathbb{C}$ ca rădăcini ale unui polinom f de gradul 3. Rezultă că $f = X^3 - s_1X^2 + s_2X - s_3$, unde $s_1 = x + y + z = 1$, $s_2 = xy + yz + zx$ și $s_3 = xyz$.

Din relația $x^2 + y^2 + z^2 = (x+y+z)^2 - 2(xy + yz + zx)$ se obține că $3 = 1 - 2s_2$, adică $s_2 = -1$.

Deoarece x, y, z sunt rădăcini ale polinomului f, obținem:

$$\begin{aligned} x^3 - s_1x^2 + s_2x - s_3 = 0 \\ y^3 - s_1y^2 + s_2y - s_3 = 0 \\ z^3 - s_1z^2 + s_2z - s_3 = 0 \end{aligned}.$$

Prin adunarea acestor egalități se obține:

$x^3 + y^3 + z^3 - s_1\left(x^2 + y^2 + z^2\right) + s_2(x + y + z) - 3s_3 = 0.$

Având în vedere sistemul dat rezultă că $s_3 = -1$.

Așadar, $f = X^3 - X^2 - X + 1 = X^2(X-1) - (X-1) = (X-1)\left(X^2 - 1\right)$ și are rădăcinile $x_1 = 1,\ x_2 = 1,\ x_3 = -1$.

Obținem că $x = 1,\ y = 1,\ z = -1$ sau $x = 1,\ y = -1,\ z = 1$ sau $x = -1,$ $y = 1,\ z = 1$.

**b)** Considerăm polinomul $f \in \mathbb{C}[X],\ f = X^3 - zX^2 - yX - x$.

Avem $f(a) = 0,\ f(b) = 0,\ f(c) = 0$, deci a, b, c sunt rădăcinile polinomului f. Din relațiile lui Viète pentru f, obținem:

$a + b + c = z,\ ab + bc + ac = -y,\ abc = x$ și astfel sistemul are soluția $x = abc,\ y = -(ab + bc + ac),\ z = a + b + c$.

## EXERCIȚII ȘI PROBLEME

### EXERSARE

**E1.** **Să se scrie relațiile lui Viète pentru polinoamele $f \in \mathbb{C}[X]$:**

**a)** $f = X^3 - 3X^2 + 4X - 10$;

**b)** $f = X^4 - 3X + 1$;

**c)** $f = X^5 - 1$;

**d)** $f = 3X^5 - X^4 + 2$;

**e)** $f = (X-1)(X-2)(X-3)$;

**d)** $f = \left(X^2 - X + 1\right)(X + 2)$.

**E2.** **Să se arate că polinomul $f \in \mathbb{Z}_p[X]$ are toate rădăcinile în $\mathbb{Z}_p$ și să se scrie relațiile lui Viète pentru acesta:**

**a)** $f = X^4 + \hat{1} \in \mathbb{Z}_2[X]$;

**b)** $f = X^3 + \hat{1} \in \mathbb{Z}_3[X]$;

**c)** $f = X^5 + \hat{1} \in \mathbb{Z}_5[X]$;

**d)** $f = X^3 - X^2 + X + \hat{4} \in \mathbb{Z}_5[X]$.

**E3.** **Să se determine rădăcinile polinomului $f \in \mathbb{C}[X]$, știind că are loc relația specificată:**

**a)** $f = 3X^3 + 7X^2 - 18X + 8,\ z_1 + z_2 = -3$;

**b)** $f = 5X^3 - 27X^2 + 7X + 15,\ z_1 \cdot z_2 = 5$;

**c)** $f = X^3 - 7X^2 + 4X + 12,\ z_1 = 3z_2$;

**d)** $f = X^3 - 10X^2 + 27X - 18,\ z_3 = 2z_1z_2$;

**e)** $f = X^4 - X^2 + 12X - 36,\ z_1z_2 + z_3z_4 = 0$.

**E4.** **Se consideră polinomul $f \in \mathbb{C}[X]$, $f = X^3 - 3X^2 + X + 3$ și $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ rădăcinile sale. Să se calculeze:**

**a)** $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$; **b)** $z_1^3 + z_2^3 + z_3^3$;

**c)** $\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3}$;

**d)** $\frac{1}{z_1^2} + \frac{1}{z_2^2} + \frac{1}{z_3^2}$;

**e)** $\frac{z_1}{1+z_1} + \frac{z_2}{1+z_2} + \frac{z_3}{1+z_3}$.

**E5.** Să se rezolve în $\mathbb{C}$ ecuațiile, știind că au loc relațiile date:

a) $z^3 - 6z^2 - az + 12 = 0$, $z_1 + z_2 = z_3$;

b) $z^3 - 11z^2 + az - 36 = 0$, $z_1 = z_2 z_3$;

c) $z^3 - 12z^2 + az - 60 = 0$, $z_1 + z_2 = 2z_3$.

**E6.** Se consideră polinomul $f \in \mathbb{C}[X]$, $f = 1 + X - 2X^2 + X^3$ cu rădăcinile $z_1$, $z_2$, $z_3$. Să se formeze polinoamele care au rădăcinile:

a) $y_1 = 1 - z_1$, $y_2 = 1 - z_2$, $y_3 = 1 - z_3$;

c) $y_1 = z_2 + z_3$, $y_2 = z_1 + z_3$, $y_3 = z_1 + z_2$;

c) $y_1 = z_2 z_3$, $y_2 = z_1 z_3$, $y_3 = z_1 z_2$;

d) $y_1 = \frac{1}{z_1}$, $y_2 = \frac{1}{z_2}$, $y_3 = \frac{1}{z_3}$.

**E7.** Fie $f \in \mathbb{Z}_3[X]$, $f = X^4 + X^2 + \hat{1}$. Dacă $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{Z}_3$ sunt rădăcinile polinomului f, să se calculeze:

a) $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \alpha_4^2$;

b) $\alpha_1^{-1} + \alpha_2^{-1} + \alpha_3^{-1} + \alpha_4^{-1}$;

c) $\alpha_1^5 + \alpha_2^5 + \alpha_3^5 + \alpha_4^5$;

d) $\alpha_1^n + \alpha_2^n + \alpha_3^n + \alpha_4^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

**E8.** Se consideră ecuația $x^4 - 3x^2 - 6x - 2 = 0$ în $\mathbb{C}$, cu soluțiile $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4 \in \mathbb{C}$ și $S = \frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \frac{1}{1+x_3} + \frac{1}{1+x_4}$. Atunci:

a) $S = 2$; b) $S = -2$;
c) $S = 0$; d) $S = 1$.

*(Univ. Transilvania, Brașov, 2000)*

## APROFUNDARE

**A1.** Dacă $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$ sunt rădăcinile polinomului $f = X^3 - 2X^2 + 2X + 17 \in \mathbb{C}[X]$ și $\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}$, atunci:

a) $\Delta = 0$; b) $\Delta = 4$;
c) $\Delta = 1$; d) $\Delta = 2$.

*(Univ. Transilvania, Brașov, 2000)*

**A2.** Să se determine rădăcinile polinomului $f \in \mathbb{C}[X]$, știind că rădăcinile sale verifică relația dată:

a) $f = X^3 + mX^2 - 4X + 4$, $z_1 + z_2 = 0$;

b) $f = X^3 + 2X^2 + aX + 2$, $z_1 + z_2 = -3$;

c) $f = X^3 - 2X^2 + aX + 6$, $z_1 z_2 = 3$;

d) $f = X^3 - 3X^2 - 4X + a$, $2z_1 = 3z_2$;

e) $f = X^3 - (a+2)X^2 + (2a+1)X - a$, $\frac{3}{z_1} = \frac{2}{z_2} + \frac{2}{z_3}$;

f) $f = X^4 - 3X^3 + 12X + a$, $z_1 z_2 = z_3 z_4$.

**A3.** Să se rezolve ecuațiile în $\mathbb{C}$, știind că au soluțiile în progresie aritmetică, pentru $m \in \mathbb{R}$:

a) $x^3 - 6x^2 + mx - 2 = 0$;

b) $z^3 - 3mz^2 + 6z - 4 = 0$;

c) $z^4 - 10z^3 + mz^2 - 50z + 24 = 0$;

d) $z^5 - 20z^4 + az^2 + bz + c = 0$.

**A4.** Să se rezolve în mulțimea $\mathbb{C}$ ecuațiile știind că au soluțiile în progresie geometrică, pentru $m \in \mathbb{R}$:

a) $x^3 - mx^2 - 6x + 27 = 0$;

b) $8x^4 - 30x^3 + 35x^2 + mx + 2 = 0$;

c) $x^4 - 14x^3 + 56x + m = 0$.

**A5.** Se consideră polinomul $f \in \mathbb{C}[X]$, $f = aX^3 + bX^2 + cX + d$, astfel încât $a, b, c, d \in \mathbb{R}^*$ sunt în progresie geometrică cu rația $q \in (0, +\infty)$. Să se calculeze $S_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n$.

**A6.** **Fie $f = X^3 + aX + b \in \mathbb{C}[X]$ cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$. Să se arate că dacă $a, b \in \mathbb{Z}$, atunci:**
**$x_1^n + x_2^n \in \mathbb{Z}, \forall\ n \in \mathbb{N}^*$.**

**A7.** **Se consideră polinomul $f = X^3 - mX^2 + aX + m \in \mathbb{C}[X]$. Să se determine $a, m \in \mathbb{R}$ știind că rădăcinile lui f verifică relația $\alpha_1^3 + \alpha_2^3 + \alpha_3^3 = m^3$.**

**A8.** **Să se rezolve în mulțimea numerelor reale sistemele:**

a) $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 6 \\ xyz = -2 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 6 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 8 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 3 \\ x^5 + y^5 + z^5 = 3 \end{cases}$.

# 7 Rezolvarea ecuațiilor algebrice cu coeficienți în $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$

Teorema lui Abel-Ruffini afirmă că pentru ecuația algebrică de grad $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 5,$ nu există formule generale de rezolvare. Aceasta face ca rezolvarea unor astfel de ecuații să fie dificilă în lipsa unor informații suplimentare asupra ecuației.

De asemenea, corpul în care ecuația are coeficienți poate conduce la obținerea unor soluții particulare și astfel, rezolvarea ecuației să fie redusă la ecuații algebrice de grad inferior.

## 7.1. Ecuații algebrice cu coeficienți în $\mathbb{Z}$

Fie $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0,$ (1), ecuație algebrică de gradul $n \in \mathbb{N}^*$, cu coeficienții $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$.

Pentru ecuația de tipul (1) se pot determina soluțiile din $\mathbb{Z}$ și $\mathbb{Q}$ pe baza următorului rezultat:

**▣ TEOREMA 15**

Fie $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0,$ ecuație algebrică de gradul $n \in \mathbb{N}^*$ cu coeficienți în $\mathbb{Z}$.

**a)** Dacă $\alpha \in \mathbb{Z}$ este soluție a ecuației, atunci $\alpha$ divide $a_n$.

**b)** Dacă $\alpha = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, (p, q) = 1,$ este soluție a ecuației, atunci p divide $a_n$, iar q divide $a_0$.

<u>*Demonstrație*</u>

**a)** Dacă $\alpha \in \mathbb{Z}$ este soluție pentru ecuație, rezultă că: $a_0\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\alpha + a_n = 0$ sau, altfel scris, $\alpha\left(a_0\alpha^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\right) = -a_n$, (2).

Din relația (2) rezultă că $\alpha$ divide $a_n$.

**b)** Dacă $\alpha = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ este soluție a ecuației, rezultă că $a_0\left(\frac{p}{q}\right)^n + a_1\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right) + a_n = 0$, egalitate care se poate scrie sub formele: $p \cdot \left(a_0p^{n-1} + a_1 \cdot p^{n-2}q + \ldots + a_{n-1}q^{n-1}\right) = -a_n \cdot q^n$ respectiv, $q \cdot \left(a_1p^{n-1} + a_2p^{n-2}q + \ldots + a_nq^n\right) = -a_0 \cdot p^n$.

Deoarece $(p, q) = 1$, se obține că p divide $a_n$ și q divide $a_0$. ■

Teorema oferă o modalitate simplă de a determina soluțiile $\alpha \in \mathbb{Z}$, respectiv $\alpha = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ ale unei ecuații algebrice cu coeficienți numere întregi. Astfel:

- soluțiile $\alpha \in \mathbb{Z}$ ale ecuației se caută printre divizorii termenului liber $a_n$;
- soluțiile $\alpha = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, $(p, q) = 1$, se caută printre numerele raționale de forma $\frac{p}{q}$, unde p este un divizor al termenului liber $a_n$, iar q este un divizor al coeficientului dominant $a_0$.

## *Problemă rezolvată*

Să se rezolve în mulțimea $\mathbb{C}$ ecuațiile:

**a)** $x^4 - x^3 - 5x^2 - x - 6 = 0$;

**b)** $2x^3 + x^2 + x - 1 = 0$.

<u>*Soluție*</u>

**a)** Căutăm soluțiile întregi ale ecuației printre divizorii lui 6. Avem: $\mathcal{D}_6 = \{\pm1, \pm2, \pm3, \pm6\}$.

Alcătuim schema lui Horner pentru acești divizori:

| | 1 | −1 | −5 | −1 | −6 | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\alpha = 1$ | 1 | 0 | −5 | −6 | −12 | $\alpha = 1$ nu este soluție |
| $\alpha = -1$ | 1 | −2 | −3 | 2 | −8 | $\alpha = -1$ nu este soluție |
| $\alpha = -2$ | 1 | −3 | 1 | −3 | R = 0 | $\alpha = -2$ este soluție |
| $\alpha = 2$ | 1 | −1 | −1 | −5 | | $\alpha = 2$ nu este soluție |
| $\alpha = 3$ | 1 | 0 | 1 | R = 0 | | $\alpha = 3$ este soluție |

Așadar s-au găsit două soluții întregi $\alpha_1 = -2$, $\alpha_2 = 3$. Rezultă că ecuația se scrie: $(x+2)(x-3)(x^2+1) = 0$, și va avea soluțiile $\alpha_1 = -2$, $\alpha_2 = 3$, $\alpha_{3,4} = \pm i$.

> ❑ **TEMĂ**
>
> **Rezolvați ecuațiile:**
> - $\mathbf{x^3 - 3x^2 + 2 = 0}$;
> - $\mathbf{x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2 = 0}$;
> - $\mathbf{x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4 = 0}$.

**b)** Se obține ușor că ecuația nu are rădăcini întregi.

Termenul liber al ecuației este −1 și are mulțimea divizorilor $\mathscr{D}_{-1} = \{-1, 1\}$, iar termenul dominant este 2 cu $\mathscr{D}_2 = \{-1, 1, -2, 2\}$. Numerele raționale, care nu sunt în $\mathbb{Z}$, ce pot fi soluții, aparțin mulțimii $S = \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$.

Se alcătuiește schema lui Horner:

| | 2 | 1 | 1 | −1 | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\alpha = -\frac{1}{2}$ | 2 | 0 | 1 | $-\frac{3}{2}$ | $\alpha = -\frac{1}{2}$ nu este soluție |
| $\alpha = \frac{1}{2}$ | 2 | 2 | 2 | R = 0 | $\alpha = \frac{1}{2}$ este soluție |

Așadar $\alpha = \frac{1}{2}$ este soluție, iar ecuația poate fi scrisă sub forma $\left(x - \frac{1}{2}\right)(2x^2 + 2x + 2) = 0$. Se găsesc soluțiile $\alpha_1 = \frac{1}{2}$ și $\alpha_{2,3} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$.

În cazul în care termenii $a_0, a_n \in \mathbb{Z}$ au mulți divizori, apar prea multe fracții $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ care trebuie încercate dacă sunt soluții. Vom arăta unele modalități practice de îndepărtare a unora dintre aceste fracții.

• Fie $f \in \mathbb{C}[X]$, un polinom de gradul $n \in \mathbb{N}^*$ cu coeficienți întregi și $\alpha = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, $(p, q) = 1$ o rădăcină a sa. Rezultă că polinomul f este divizibil cu $X - \frac{p}{q}$ și $f = \left(X - \frac{p}{q}\right) \cdot C(X)$ sau $f = (qX - p)C_1(X)$, unde $C_1$ este un polinom cu coeficienți în $\mathbb{Z}$. Atunci vom obține: $f(1) = (q - p)C_1(1)$ și $f(-1) = (-q - p)C_1(-1)$.

Deoarece $C_1(1), C_1(-1) \in \mathbb{Z}$, este necesar ca p – q să dividă $f(1)$ și p + q să dividă $f(-1)$.

Așadar, dacă p – q nu divide $f(1)$ sau p + q nu divide $f(-1)$, atunci $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ nu este soluție a ecuației.

## *Problemă rezolvată*

☒ Să se rezolve ecuația $4x^4 - 8x^3 - 11x^2 + 13x - 3 = 0$.

*Soluție*

• Căutăm soluții întregi printre divizorii lui 3. Va rezulta că ecuația nu are soluții în $\mathbb{Z}$.

• Căutăm soluții raționale. Acestea pot fi:

$\frac{p}{q} \in \left\{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{3}{4}, -\frac{3}{4}\right\}$.

Avem $f = 4X^4 - 8X^3 - 11X^2 + 13X - 3$ polinomul asociat și $f(1) = -5$ și $f(-1) = -15$. Înlăturăm fracțiile care nu pot fi soluții:

| $\frac{p}{q}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{-1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{-1}{4}$ | $\frac{3}{2}$ | $\frac{-3}{2}$ | $\frac{3}{4}$ | $\frac{-3}{4}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| p + q | 3 | 1 | 5 | 3 | 5 | –1 | 7 | 1 | $f(-1) = -15$ |
| p – q | –1 | –3 | –3 | –5 | 1 | –5 | –1 | –7 | $f(1) = -5$ |

Se observă că au mai rămas de probat dacă sunt soluții numai fracțiile $\frac{p}{q} \in \left\{\frac{1}{2}, \frac{-1}{4}, \frac{3}{2}, \frac{-3}{2}\right\}$.

Făcând proba prin schema lui Horner se constată că sunt soluții $\alpha_1 = \frac{1}{2}$, $\alpha_2 = -\frac{3}{2}$ și se obține ecuația: $\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{3}{2}\right)\left(x^2 - 3x + 1\right) = 0.$

Rezultă că $\alpha_{3,\,4} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

## 7.2. Ecuații algebrice cu coeficienți raționali

Fie $a, b, c \in \mathbb{Q}$, astfel încât $b \neq 0$, $c > 0$ și $\sqrt{c} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Numerele reale de forma $u = a + b\sqrt{c}$ se numesc **numere iraționale pătratice**.

Numărul irațional pătratic $\overline{u} = a - b\sqrt{c}$ se numește **conjugatul numărului** $u = a + b\sqrt{c}$.

Se observă ușor că oricare număr irațional pătratic $u = a + b\sqrt{c}$ se poate scrie sub una din formele $\alpha + \sqrt{\beta}$ sau $\alpha - \sqrt{\beta}$, unde $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$, $\beta > 0$, $\sqrt{\beta} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, având în vedere introducerea sau scoaterea factorilor de sub radicali.

Folosind formula binomului lui Newton, rezultă că dacă $u = a + \sqrt{b}$ este număr irațional pătratic, atunci $u^n = \left(a + \sqrt{b}\right)^n = a_n + \sqrt{b_n}$, unde $a_n, b_n \in \mathbb{Q}$, și $b_n > 0$, $\sqrt{b_n} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Așadar $u^n$ este număr irațional pătratic. De asemenea se observă că $\overline{u}^n = a_n - \sqrt{b_n} = \overline{\left(u^n\right)}$.

**▣ TEOREMA 16**

Fie $f \in \mathbb{Q}[X]$, $f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \ldots + a_nX^n$, un polinom de gradul n, $n \in \mathbb{N}^*$ și $u = a + \sqrt{b}$ număr irațional pătratic.

Dacă u este rădăcină a polinomului f, atunci:

**a)** $\overline{u} = a - \sqrt{b}$ este rădăcină a lui f;

**b)** u și $\overline{u}$ au același ordin de multiplicitate.

*Demonstrație*

**a)** Avem succesiv:

$$f\left(\overline{u}\right) = a_0 + a_1\left(a - \sqrt{b}\right) + \ldots + a_n\left(a - \sqrt{b}\right)^n = a_0 + a_1\left(\alpha_1 - \sqrt{\beta_1}\right) +$$
$$+ a_2\left(\alpha_2 - \sqrt{\beta_2}\right) + \ldots + a_n\left(\alpha_n - \sqrt{\beta_n}\right) = a_0 + a_1\overline{\left(\alpha_1 + \sqrt{\beta_1}\right)} + a_2\overline{\left(\alpha_2 + \sqrt{\beta_2}\right)} + \ldots +$$
$$+ a_n\overline{\left(\alpha_n + \sqrt{\beta_n}\right)} = \overline{f(u)} = 0,$$ deci $\overline{u}$ este rădăcină a polinomului f.

**b)** Fie $m, m_1 \in \mathbb{N}$ ordinele de multiplicitate ale rădăcinilor u și $\overline{u}$. Polinomul f se scrie: $f = (X-u)^m \cdot (X-\overline{u})^{m_1} \cdot g$, (1), unde $g \in \mathbb{Q}[X]$ și $g(u) \neq 0$, $g(\overline{u}) \neq 0$.

Să presupunem că $m < m_1$. Atunci, din relația (1), se obține:
$f = (X^2 - 2aX + a^2 - b)^m \cdot (X-\overline{u})^{m_1 - m} \cdot g = (X^2 - 2aX + a^2 - b)^m \cdot h$, (2).

Polinomul $h = (X-\overline{u})^{m_1-m} \cdot g \in \mathbb{Q}[X]$ și $h(\overline{u}) = 0$. Din punctul a) al teoremei se obține că $h(u) = 0$, deci $(u-\overline{u})^{m_1-m} \cdot g(u) = 0$. Dar $u - \overline{u} \neq 0$, deci este necesar ca $g(u) = 0$, în contradicție cu $g(u) \neq 0$.

Așadar nu se poate ca $m < m_1$. Analog se arată că nu are loc inegalitatea $m_1 < m$. În concluzie $m = m_1$ și teorema este demonstrată. ■

## *Problemă rezolvată*

☒ Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $x^3 + 2x^2 + ax + b = 0$, știind că a, b $\in \mathbb{Q}$ și că admite soluția $x_1 = 1 + \sqrt{2}$.

*Soluție*

Considerăm $f \in \mathbb{Q}[X]$, $f = X^3 + 2X^2 + aX + b$. Polinomul f admite rădăcina $x_1 = 1 + \sqrt{2}$, deci conform teoremei anterioare admite și rădăcina $x_2 = 1 - \sqrt{2}$.

Din relațiile lui Viète se obține: $x_1 + x_2 + x_3 = -2$ și $x_3 = -4$.

Așadar:
$f = (X - 1 + \sqrt{2})(X - 1 - \sqrt{2})(X + 4) =$
$= X^3 + 2X^2 - 9X - 4$ și se obține că $a = -9$, $b = -4$.

### ❑ TEMĂ

**Să se rezolve următoarele ecuații, dacă:**

- $\mathbf{x^3 - 4x^2 + 3x + 2 = 0}$, $\mathbf{x_1 = 1 + \sqrt{2}}$;
- $\mathbf{x^3 - 5x^2 + 5x - 1 = 0}$, $\mathbf{x_1 = 2 + \sqrt{3}}$;
- $\mathbf{x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 4x + 1 = 0}$, $\mathbf{x_1 = 2 - \sqrt{3}}$.

### ❑ TEMĂ DE STUDIU

**Fie $f \in \mathbb{Q}[X]$ un polinom de gradul $n \in \mathbb{N}^*$, cu rădăcina $x_1 = \sqrt{a} + \sqrt{b}$, a, b $\in \mathbb{Q}_+^*$ și $\sqrt{a}, \sqrt{b} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.**

**a) Să se studieze dacă numerele $\sqrt{a} - \sqrt{b}$, $\sqrt{b} - \sqrt{a}$, $-\sqrt{a} - \sqrt{b}$ sunt rădăcini ale polinomului f.**

**b) Care este gradul minim al polinomului f?**

## 7.3. Ecuații algebrice cu coeficienți reali

**▣ TEOREMA 17**

Fie $f \in \mathbb{R}[X]$, un polinom de gradul $n \in \mathbb{N}^*$.

Dacă $z = a + bi \in \mathbb{C}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$ este rădăcină a polinomului f, atunci:

**a)** $\overline{z}$ este rădăcină a polinomului f;

**b)** z și $\overline{z}$ au același ordin de multiplicitate.

*Demonstrație* (Temă)

**➲ OBSERVAȚII**

Fie $f \in \mathbb{C}[X]$, un polinom cu coeficienți reali de gradul $n \in \mathbb{N}^*$.

- Polinomul f are un număr par de rădăcini $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.
- Dacă n este impar, atunci polinomul f are cel puțin o rădăcină reală. Mai mult, numărul de rădăcini reale este impar.

### *Probleme rezolvate*

☒ **1.** Să se rezolve în $\mathbb{C}$ ecuația $z^3 - z^2 + 2 = 0$, știind că admite soluția $z_1 = 1 + i$.

*Soluție*

Fie $f \in \mathbb{C}[X]$, $f = X^3 - X^2 + 2$, polinomul cu coeficienți reali atașat ecuației date.

Rezultă că f are rădăcina $z_1 = 1 + i$, deci va avea și rădăcina $z_2 = 1 - i$. Din relațiile lui Viète rezultă că $z_1 + z_2 + z_3 = 1$, deci $z_3 = -1$.

**❑ TEMĂ**

**Să se rezolve ecuația $z^3 + z + 10 = 0$ știind că admite soluția $z_1 = 1 + 2i$.**

☒ **2.** Să se determine numerele reale a, b și să se rezolve ecuația $z^5 + 2z^4 + 2z^3 + 4z^2 + az + b = 0$, știind că admite soluția dublă $z_1 = i$.

*Soluție*

Deoarece ecuația admite soluția $z_1 = i$, ea va admite și soluția $z_3 = \overline{z_1} = -i$, soluție dublă. Așadar sunt cunoscute soluțiile: $z_1 = z_2 = i$, $z_3 = z_4 = -i$. Din relația lui Viète $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5 = -2$ se obține că $z_5 = -2$. Așadar $f = (X - i)^2 \cdot (X + i)^2 \cdot (X + 2) = \left(X^2 + 1\right)^2 (X + 2)$.

Împărțind polinomul f prin $X^2+1$ (sau folosind relațiile lui Viète) se obține că a = 1 și b = 2.

☒ **3.** Să se rezolve ecuația $x^5-3x^4+x^3+ax^2+bx+c=0$, a, b, c ∈ $\mathbb{Q}$, știind că admite soluțiile $x_1=1+i$ și $x_2=1-\sqrt{2}$.

*Soluție*

Fie $f\in\mathbb{C}[X]$, $f=X^5-3X^4+X^3+aX^2+bX+c$, polinomul atașat ecuației. Deoarece a, b, c ∈ $\mathbb{Q}$, rezultă că f admite și soluțiile $x_3=1+\sqrt{2}$, $x_4=1-i$. Din relația lui Viète: $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=3$ se obține $x_5=-1$. Rezultă că f are forma $f=(X-1-i)(X-1+i)\left(X-1+\sqrt{2}\right)\left(X-1-\sqrt{2}\right)\cdot$ $\cdot(X+1)=\left(X^2-2X+2\right)\left(X^2-2x-1\right)\cdot(X+1)$. Împărțind polinomul f la $X^2-2X+2$ și $X+1$, sau folosind relațiile lui Viète corespunzătoare, se obține a = 3, b = –4, c = –2.

## EXERCIȚII ȘI PROBLEME

### EXERSARE

**E1.** **Să se determine soluțiile întregi ale ecuațiilor:**

**a)** $x^4-x^3-x^2+x-2=0$;

**b)** $x^4-2x^3-3x^2+8x-4=0$;

**c)** $x^5+3x^4-5x^3-15x^2+$ $+4x+12=0$.

**E2.** **Să se determine soluțiile raționale ale ecuațiilor:**

**a)** $2x^3+3x^2+6x-4=0$;

**b)** $4x^4+8x^3+7x^2+8x+3=0$;

**c)** $12x^5-23x^4+10x^3+2x-1=0$.

**E3.** **Să se determine polinoamele $f\in\mathbb{Q}[X]$ de gradul 4, care au rădăcinile:**

**a)** $1, 2, 2+\sqrt{3}$;

**b)** $-2$ dublă, $1-\sqrt{2}$;

**c)** $1-\sqrt{3}$ dublă;

**d)** $2-\sqrt{3}$ și $3-\sqrt{2}$.

**E4.** **Să se rezolve ecuațiile, știind că au soluția indicată:**

**a)** $x^4-4x^3-4x^2+16x+12=0$, $x_1=1-\sqrt{3}$;

**b)** $x^4-2x^3-2x-1=0$, $x_1=1+\sqrt{2}$;

**c)** $z^4-7z^3+14z^2-2z-12=0$, $z_1=1-\sqrt{3}$;

**d)** $z^4-10z^3+31z^2-34z+12=0$, $z_1=3-\sqrt{5}$;

**e)** $z^4-z^3-2z^2-3z-1=0$, $z_1=1+\sqrt{2}$;

**f)** $2z^4-7z^3+5z^2+z-1=0$, $z_1=1-\sqrt{2}$.

**E5.** **Să se rezolve ecuațiile știind soluția indicată:**

**a)** $z^4+6z^3+15z^2+18z+10=0$, $z_1=-1-i$;

b) $z^4 - 2z^3 + 3z^2 - 2z + 2 = 0$, $z_1 = i$;

c) $z^4 + z^3 + 4z^2 + z + 3 = 0$, $z_1 = i$;

d) $3z^4 - 5z^3 + 3z^2 + 4z - 2 = 0$, $z_1 = 1 + i$;

e) $2z^3 - 3z^2 + 2z + 2 = 0$, $z_1 = 1 + i$;

f) $z^4 - 8z^3 + 26z^2 - 40z + 25 = 0$, $z_1 = 2 - i$.

## APROFUNDARE

**A1.** Să se determine $a \in \mathbb{Z}$ și rădăcinile polinomului $f \in \mathbb{Q}[X]$, $f = X^3 - aX^2 + 3X + 2$, știind că acesta admite rădăcini numere întregi.

**A2.** Fie $f \in \mathbb{Q}[X]$, $f = X^3 + aX^2 + bX - 2$, $a, b \in \mathbb{Z}$. Să se rezolve ecuația $f(x) = 0$ știind că are cel puțin două soluții în $\mathbb{Z}$.

**A3.** Să se determine $a \in \mathbb{Z}$ știind că polinomul $f \in \mathbb{Q}[X]$ admite rădăcini raționale:

a) $f = X^3 + aX^2 + 3X - 3$;

b) $f = X^4 + aX^2 - 3$;

c) $f = 2X^3 + 4X^2 + aX - 6$;

d) $f = 4X^4 - 12X^3 + 7X^2 + aX - 2$.

**A4.** Să se determine $m \in \mathbb{Q}$ și apoi să se rezolve ecuațiile obținute știind că admit și soluțiile indicate:

a) $x^3 + 5x + m = 0$, $x_1 = \sqrt{2} - 1$;

b) $x^4 + 2x^2 - 64x + m = 0$, $x_1 = 2 + \sqrt{3}$;

c) $x^3 + mx^2 + 2m + 8 = 0$, $x_1 = \sqrt{5} + 1$.

**A5.** Să se rezolve ecuațiile date, dacă $a, b \in \mathbb{Q}$ și admit soluția indicată:

a) $z^3 + 2z^2 + az + b = 0$, $z_1 = \sqrt{2} - 1$;

b) $z^3 - 4z^2 + az + b = 0$, $z_1 = 2 - \sqrt{3}$;

c) $z^4 + 2z^3 - 2az^2 + 2bz + 1 = 0$, $z_1 = \sqrt{3} - 2$;

d) $z^4 + 4z^3 + az^2 + bz + 4 = 0$, $z_1 = 3 - \sqrt{5}$.

**A6.** Să se determine $a, b \in \mathbb{Q}$, știind că ecuația $x^3 - 4x^2 - 5x + a = 0$ admite soluția $x_1 = b + \sqrt{2}$.

**A7.** Să se rezolve ecuațiile și să se determine $a, b \in \mathbb{R}$, în cazurile:

a) $z^4 - z^3 + az^2 - z + 1 = 0$, $z_1 = -i$;

b) $z^4 + 3z^3 + az^2 + 21z + b = 0$, $z_1 = 1 - 2i$;

c) $z^4 + 2z^3 + az^2 + bz + 39 = 0$, $z_1 = 3 - 2i$;

d) $z^3 + az^2 + bz + 2 = 0$, $z_1 = 1 - i$.

**A8.** Să se rezolve ecuațiile știind că $a, b \in \mathbb{Z}$ și că admit o soluție dublă număr întreg:

a) $x^3 + ax^2 + bx + 1 = 0$;

b) $x^4 + ax^3 + bx^2 + 2x + 2 = 0$;

**A9.** Să se rezolve ecuațiile următoare, în condițiile date:

a) $z^5 - 5z^4 + 9z^3 - 7z^2 + 2 = 0$, $z_1 = 1 + \sqrt{2}$, $z_2 = 1 + i$;

b) $z^6 - 4z^5 + 4z^4 - 8z^3 + 4z^2 + 32z + 16 = 0$, $z_1 = z_2 = 1 + \sqrt{3}$;

c) $z^6 - 5z^5 + 19z^4 - 39z^3 + 38z^2 - 34z + 20 = 0$, $z_1 = i$, $z_2 = 1 + 3i$;

d) $z^5 - 4z^3 + 4z^2 + 4z - 8 = 0$, $z_1 = \sqrt{2}$, $z_2 = 1 - i$.

**A10.** **Fie a, b, c, d $\in \mathbb{Q}$. Să se rezolve ecuațiile în condițiile specificate:**

**a)** $x^6 + ax^5 + bx^4 + 4x^3 + 23x^2 + cx + d = 0$, **dacă** $x_1 = 3 - \sqrt{11}$, $x_2 = 2 - \sqrt{5}$;

**b)** $2x^6 + ax^5 + bx^4 + cx^3 - x^2 + dx + 8 = 0$, $x_1 = 5 - i\sqrt{3}$, $x_2 = 1 + \sqrt{2}$.

**A11.** **Se dă ecuația** $x^6 + 3x^5 - 12x^4 - 42x^3 - 19x^2 + ax + b = 0$, **a, b $\in \mathbb{Q}$. Să se rezolve ecuația, știind că admite soluția** $x_1 = \sqrt{2} + \sqrt{5}$.

**A12.** **Să se scrie ecuația cu coeficienți raționali de gradul cel mai mic $n \in \mathbb{N}^*$, care admite soluția $x_1$ în cazurile:**

**a)** $x_1 = \sqrt{2} + \sqrt{3}$; **b)** $x_1 = \sqrt{2} + \sqrt{5}$;

**c)** $x_1 = \sqrt{5} - \sqrt{3}$.

**A13.** **Să se rezolve ecuațiile știind că admit soluții independente de parametrul m $\in \mathbb{C}$:**

**a)** $x^3 + (m-3)x^2 - (3m+4)x - 4m = 0$;

**b)** $x^3 - x^2 - \left(m^2 + m + 2\right)x + 2m^2 + 2m = 0$.

**A14.** **Se consideră ecuația:** $\left(p^2 - 1\right)x^4 - \left(p^2 + 3\right)x^3 - \left(3p^2 + 1\right)x^2 + \left(5p^2 + 3\right)x - 2\left(p^2 - 1\right) = 0$, **unde** $p \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $|p| \geq 1$, **cu soluțiile** $x_1, x_2, x_3, x_4$. **Dacă** $x_1, x_2$ **sunt soluțiile reale independente de p și** $S = \operatorname{Re}(x_3) + \operatorname{Re}(x_4)$, **atunci:**

**a)** $S \in [0, +\infty)$; **b)** $S \in (-\infty, -25)$;

**c)** $S \in (-4, -3)$; **d)** $S \in (-2, -1)$;

**e)** $S \in (-1, 0)$.

***(ASE, București, 2002)***

# 8 Rezolvarea unor ecuații algebrice de grad superior cu coeficienți în $\mathbb{C}$

## 8.1. Ecuații bipătrate

O **ecuație bipătrată** cu coeficienți în $\mathbb{C}$ este o ecuație algebrică de forma $az^4 + bz^2 + c = 0$, $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$.

Pentru rezolvare se parcurg următorii pași:

• se notează $z^2 = y$ și se obține ecuația de gradul doi: $ay^2 + by + c = 0$, numită **ecuația rezolventă** a ecuației bipătrate;

• se rezolvă ecuația rezolventă în mulțimea $\mathbb{C}$ obținându-se soluțiile $y_1, y_2 \in \mathbb{C}$;

• se scriu și se rezolvă ecuațiile $z^2 = y_1$ și $z^2 = y_2$ obținându-se soluțiile $z_1, z_2, z_3, z_4$ ale ecuației bipătrate.

☞ ***Exemplu***

- Să se rezolve ecuațiile în $\mathbb{C}$:

**a)** $z^4 - 3z^2 - 4 = 0$; **b)** $z^4 + (1-i)z^2 - i = 0.$

*Soluție*

Ecuațiile sunt bipătrate.

**a)** Fie $z^2 = y.$ Se obține ecuația rezolventă $y^2 - 3y - 4 = 0$ cu soluțiile $y_1 = -1$, $y_2 = 4$. Rezultă $z^2 = -1$ și $z^2 = 4$ cu soluțiile $z_1 = i, z_2 = -i$, respectiv $z_3 = 2, z_4 = -2$.

**b)** Notând $z^2 = y$ se obține ecuația rezolventă $y^2 + (1-i)y - i = 0$ cu soluțiile $y_1 = -1$ și $y_2 = i$. Rezultă ecuațiile: $z^2 = -1$ și $z^2 = i$. Din prima ecuație se obține $z_1 = i, z_2 = -i$. Pentru a rezolva a doua ecuație considerăm $z = a + bi \in \mathbb{C}$, $a, b \in \mathbb{R}$ și se obține: $(a+bi)^2 = i$ sau $a^2 - b^2 + 2abi = i$. Din egalitatea de numere complexe se obține sistemul $\begin{cases} a^2 - b^2 = 0 \\ 2ab = 1 \end{cases}$. Substituind $b = \dfrac{1}{2a}$ în prima ecuație a sistemului se obține ecuația $4a^4 = 1$ cu soluțiile reale $a = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Rezultă că $b = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, iar $z_{3,4} = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$.

## *Problemă rezolvată*

☒ Să se arate că $\cos\dfrac{\pi}{5} = \dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$.

*Soluție*

Știm că $0 = \sin\pi = \sin\left(\dfrac{2\pi}{5} + \dfrac{3\pi}{5}\right) = \sin\dfrac{2\pi}{5}\cdot\cos\dfrac{3\pi}{5} + \sin\dfrac{3\pi}{5}\cdot\cos\dfrac{2\pi}{5}$, (*).

Notând $x = \cos\dfrac{\pi}{5}$ și având în vedere că $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$, $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$, din relația (*) se obține ecuația:

$$\left(16x^4 - 12x^2 + 1\right)\cdot x = 0.$$

Rezultă că $x \in \left\{0, \pm\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}, \pm\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}\right\}$.

Se obține soluția convenabilă $x = \dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$.

## 8.2. Ecuații binome

O ecuație binomă cu coeficienți în mulțimea $\mathbb{C}$ este o ecuație algebrică de forma: $z^n - a = 0$, unde $n \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{C}$. (1)

Scriind ecuația binomă (1) sub forma $z^n = a$, rezolvarea ei se reduce la determinarea rădăcinilor de ordinul $n \in \mathbb{N}^*$ ale numărului complex a.

Dacă $a = r(\cos t + i\sin t)$ este scrierea sub formă trigonometrică a numărului a, atunci se obține:

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{t+2k\pi}{n} + i\sin\frac{t+2k\pi}{n}\right),$$

$k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$, (2),

(rădăcinile complexe ale lui $z \in \mathbb{C}$).

❑ **NE REAMINTIM!**

Pentru $z \in \mathbb{C}$, se cunosc:
- $z = a + bi$, forma algebrică;
- $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, modulul lui z;
- $z = |z|(\cos t + i\sin t)$, $\cos t = \frac{a}{|z|}$, $\sin t = \frac{b}{|z|}$ forma trigonometrică;
- $(\cos t + i\sin t)^n = \cos nt + i\sin nt$, formula lui Moivre.

☞ ***Exemplu***

- Să se rezolve ecuația binomă $z^4 - i = 0$.

*Soluție*

Forma trigonometrică a numărului a = i este: $i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$. Având în vedere relația (2) rezultă soluțiile: $z_k = \cos\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{4} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{4}$, $k \in \{0, 1, 2, 3\}$.

## 8.3. Ecuații reciproce

❖ **DEFINIȚIE**

- Polinomul $f \in K[X]$, $f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \ldots + a_nX^n$, de gradul $n \in \mathbb{N}^*$ se numește **polinom reciproc** dacă între coeficienții săi există relațiile: $a_k = a_{n-k}$, $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$. (1)

☞ ***Exemple***

Polinoamele reciproce $f \in K[X]$ de gradul 1, 2, 3 și 4 au formele:

- $f_1 = aX + a$, $f_2 = aX^2 + bX + a$, $f_3 = aX^3 + bX^2 + bX + a$, respectiv $f_4 = aX^4 + bX^3 + cX^2 + bX + a$, unde $a, b, c \in K$ și $a \in K^*$.

❖ **DEFINIȚIE**

- Se numește **ecuație algebrică reciprocă de gradul** $n \in \mathbb{N}^*$ o ecuație de forma $f(x) = 0$, unde $f \in K[X]$ este un polinom reciproc de gradul n.

Forma particulară a polinoamelor (ecuațiilor) reciproce de gradul n conduce la câteva observații generale:

**1.** Orice ecuație algebrică reciprocă de grad impar admite soluția $x_1 = -1$.

Într-adevăr, polinomul f se poate scrie sub forma $f = a_0\left(1+X^n\right)+$ $+a_1\left(X+X^{n-1}\right)+a_2\left(X^2+X^{n-2}\right)+\ldots$ și se obține $f(-1)=0$.

**2.** Prin împărțirea polinomului reciproc f de grad impar n la X + 1 se obține un cât care este polinom reciproc de grad n – 1.

**3.** Dacă ecuația reciprocă are soluția $\alpha$, atunci are și soluția $\frac{1}{\alpha}$.

## Rezolvarea ecuației reciproce de gradul 3

Ecuația reciprocă de gradul 3 cu coeficienți în corpul $\mathbb{C}$ are forma: $ax^3+bx^2+bx+a=0.$ Ecuația se poate scrie succesiv: $a\left(x^3+1\right)+$ $+bx(x+1)=0$ sau $(x+1)\left(ax^2+(b-a)x+a\right)=0.$ (1)

Forma de scriere (1) arată că ecuația are soluția $x_1=-1$ și alte două soluții date de ecuația reciprocă de gradul 2: $ax^2+(b-a)x+a=0.$

☞ ***Exemplu***

- Să se rezolve în $\mathbb{C}$ ecuația $2x^3+3x^2+3x+2=0.$

*Soluție*

Ecuația se scrie: $(x+1)\left(2x^2+x+2\right)=0$ și are soluțiile: $x_1=-1$ și $x_{2,\,3}=\frac{-1\pm i\sqrt{15}}{4}.$

## Rezolvarea ecuației reciproce de gradul 4

Forma generală a ecuației reciproce de gradul 4 cu coeficienți întregi este: $az^4+bz^3+cz^2+bz+a=0.$

Se observă că ecuația nu admite soluția x = 0.

Pentru rezolvare se parcurg următorii pași:

- Se împarte prin $z^2$ și se obține: $az^2+bz+c+\frac{b}{z}+\frac{a}{z^2}=0.$
- Se grupează termenii care au coeficienți egali:

$$a\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)+b\left(z+\frac{1}{z}\right)+c=0.$$

• Se notează $z+\frac{1}{z}=y$ și rezultă că $z^2+\frac{1}{z^2}=y^2-2$. Se obține ecuația de gradul 2 în y: $a\left(y^2-2\right)+by+c=0$ sau $ay^2+by+c-2a=0$ numită **ecuația rezolventă** a ecuației reciproce de gradul 4.

• Se rezolvă ecuația rezolventă obținând soluțiile $y_1, y_2 \in \mathbb{C}$.

• Se rezolvă ecuațiile $z+\frac{1}{z}=y_1$ și $z+\frac{1}{z}=y_2$ care se aduc la forma: $z^2-y_1z+1=0$ și $z^2-y_2z+1=0$. Rezultă astfel soluțiile $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$ ale ecuației reciproce.

Așadar, rezolvarea ecuației reciproce de gradul 4 se reduce la rezolvarea a trei ecuații de gradul 2.

☞ ***Exemplu***

• Să se rezolve ecuația reciprocă $z^4+z^3-4z^2+z+1=0$.

*Soluție*

După împărțirea cu $z^2$ se obține: $z^2+\frac{1}{z}-4+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}=0$ sau $\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)+\left(z+\frac{1}{z}\right)-$ $-4=0$. Cu notația $y=z+\frac{1}{z}$, obținem $z^2+\frac{1}{z^2}=y^2-2$ și ecuația rezolventă $y^2+y-6=0$ cu soluțiile $y_1=-3,\ y_2=2$.

Avem ecuațiile: $z+\frac{1}{z}=-3$ și $z+\frac{1}{z}=2$ sau $z^2+3z+1=0$ și $z^2-2z+1=0$. Se obțin soluțiile $z_{1,2}=1$ și $z_{3,4}=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$.

❑ **TEMĂ**

**Să se rezolve ecuațiile:**

• $2z^4-3z^3+2z^2-3z+2=0$;

• $z^4+3z^3-8z^2+3z+1=0$.

## ➲ OBSERVAȚII

**1.** Dacă $f\in\mathbb{C}[X]$, este polinom reciproc de gradul $n\in\mathbb{N}^*$, n număr impar, atunci rezolvarea ecuației reciproce de gradul n se reduce la rezolvarea ecuației z + 1 = 0 și a unei ecuații reciproce de gradul n – 1.

☞ ***Exemplu***

◆ Să se rezolve ecuația $x^5-3x^4+2x^3+2x^2-3x+1=0$.

*Soluție*

Deoarece x = –1 este soluție a ecuației, prin împărțirea polinomului $f=X^5-3X^4+2X^3+2X^2-3X+1$ la $g=X+1$ obținem descompunerea $f=(X+1)\cdot$ $\cdot\left(X^4-4X^3+6X^2-4X+1\right)$. Rezultă ecuația $(x+1)\left(x^4-4x^3+6x^2-4x+1\right)=0$. Avem $x_1=-1$, iar celelalte 4 soluții sunt date de ecuația reciprocă $x^4-4x^3+6x^2-4x+1=0$. Se obține $x_{2,3,4,5}=1$.

**2.** Dacă $f \in \mathbb{C}[X]$, este un polinom reciproc de gradul n, n = 2k, rezolvarea ecuației reciproce atașate se poate reduce la rezolvarea unei ecuații de gradul k cu necunoscuta $y = z + \frac{1}{z}$, și a k ecuații de gradul 2 date de ecuațiile $z + \frac{1}{z} = y_p$, $p \in \{1, 2, \ldots, k\}$.

☞ ***Exemplu***

- Să se rezolve ecuația reciprocă de gradul 6 în mulțimea $\mathbb{C}$:
  $z^6 - 5z^5 + 4z^4 + 4z^2 - 5z + 1 = 0.$

*Soluție*

Împărțind cu $z^3$ se obține: $z^3 + \frac{1}{z^3} - 5\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) + 4\left(z + \frac{1}{z}\right) = 0$. Dacă $z + \frac{1}{z} = y$, atunci $z^2 + \frac{1}{z^2} = y^2 - 2$ și $z^3 + \frac{1}{z^3} = \left(z + \frac{1}{z}\right)\left(z^2 + \frac{1}{z^2} - 1\right) = y\left(y^2 - 3\right)$. Se obține ecuația rezolventă de gradul 3 în y: $y^3 - 5y^2 + y + 10 = 0$ care se descompune astfel: $(y - 2)\left(y^2 - 3y - 5\right) = 0$. Se obțin soluțiile: $y_1 = 2$, $y_2 = \frac{3 - \sqrt{29}}{2}$, $y_3 = \frac{3 + \sqrt{29}}{2}$ și se obțin ecuațiile în z de forma: $z + \frac{1}{z} = y$, sau $z^2 - yz + 1 = 0$, unde $y \in \left\{2, \frac{3 - \sqrt{29}}{2}, \frac{3 + \sqrt{29}}{2}\right\}$.

**3.** În cazul unei ecuații reciproce cu coeficienți într-un corp K se procedează în mod analog.

# EXERCIȚII ȘI PROBLEME

## EXERSARE

**E1. Să se rezolve în mulțimea $\mathbb{C}$ ecuațiile bipătrate:**

**a)** $z^4 - 2z^2 + 1 = 0;$

**b)** $z^4 + 2z^2 + 1 = 0;$

**c)** $z^4 - 10z^2 + 9 = 0;$

**d)** $9z^4 - 10z^2 + 1 = 0;$

**e)** $z^4 - 17z^2 + 16 = 0;$

**f)** $25z^4 - 26z^2 + 1 = 0;$

**g)** $z^4 + z^2 + 2 = 0;$

**h)** $z^4 + 29z^2 + 100 = 0;$

**i)** $z^4 - 2z^2 - 15 = 0.$

**E2. Să se rezolve ecuațiile binome în mulțimea $\mathbb{C}$:**

**a)** $z^3 - 125 = 0;$

**b)** $z^4 - 625 = 0;$

**c)** $z^3 + 8 = 0;$

**d)** $z^3 + 125 = 0;$

**e)** $z^4 + 16 = 0;$

**f)** $z^4 + i = 0;$

**g)** $z^6 - i = 0;$

**h)** $z^5 - i^3 = 0.$

**E3.** Să se rezolve în $\mathbb{C}$ ecuațiile reciproce de gradul 3:

a) $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$;

b) $x^3 - 5x^2 - 5x + 1 = 0$;

c) $2x^3 - 7x^2 - 7x + 2 = 0$;

d) $4x^3 - x^2 - x + 4 = 0$;

e) $\sqrt{2}x^3 + x^2 + x + \sqrt{2} = 0$;

f) $2x^3 - 5x^2 - 5x + 2 = 0$.

**E4.** Să se rezolve în $\mathbb{C}$ ecuațiile reciproce de gradul 4:

a) $6x^4 + x^3 - 14x^2 + x + 6 = 0$;

b) $x^4 + 2x^3 - 6x^2 + 2x + 1 = 0$;

c) $2x^4 - x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$;

d) $7x^4 - x^3 - 12x^2 - x + 7 = 0$;

e) $x^4 - 7x^3 + 12x^2 - 7x + 1 = 0$;

f) $2x^4 - 5x^3 + 10x^2 - 5x + 2 = 0$.

**E5.** Să se rezolve în $\mathbb{C}$ ecuațiile reciproce:

a) $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$;

b) $2x^5 + x^4 - 3x^3 - 3x^2 + x + 2 = 0$;

c) $3x^5 + 2x^4 - 5x^3 - 5x^2 + 2x + 3 = 0$;

d) $x^6 + x^5 + x^4 - 6x^3 + x^2 + x + 1 = 0$.

**E6.** Să se rezolve în $\mathbb{C}$:

a) $(x-1)^4 + (x+1)^4 = 82$;

b) $(x-i)^4 + (x+i)^4 = 16$.

## APROFUNDARE

**A1.** Să se rezolve ecuațiile bipătrate în mulțimea $\mathbb{C}$:

a) $x^4 + x^2 + 1 = 0$;

b) $x^4 + 17x^2 + 16 = 0$;

c) $x^2 + \left(\frac{12}{x}\right)^2 = 40$;

d) $x^2 - \left(\frac{6}{x}\right)^2 = 5$.

**A2.** Să se rezolve în $\mathbb{Z}_5$ ecuațiile:

a) $x^4 - x^2 + \hat{1} = \hat{0}$;

b) $\hat{2}x^4 + x^2 + \hat{2} = \hat{0}$;

c) $\hat{3}x^4 + \hat{4}x^2 + \hat{3} = \hat{0}$;

d) $\hat{2}x^4 + \hat{3}x^2 + \hat{1} = \hat{0}$.

**A3.** Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ pentru care ecuația $x^4 + (a^2 + b^2 - 2ab + 2b - 23)x^3 - (3a + 3b - 2)x^2 - (a + b - 7)x + 3(ab + a - b - 1) = 0$, este ecuație bipătrată și să se rezolve în acest caz.

**A4.** Să se rezolve ecuațiile în mulțimea numerelor complexe:

a) $x^3 + ix^2 + ix + 1 = 0$;

b) $ix^3 + (1+i)x^2 + (1+i)x + i = 0$;

c) $z^3 - \varepsilon z^2 - \varepsilon z + 1 = 0,\ \varepsilon^3 = 1$.

**A5.** Pentru care valori ale lui $a \in \mathbb{R}$, ecuația $x^3 + ax^2 + ax + 1 = 0$ admite soluții multiple?

**A6.** Să se rezolve în $\mathbb{C}$ ecuația $x^4 + (a+1)x^3 + bx^2 + 5x + 1 = 0$, știind că este ecuație reciprocă și admite o soluție dublă.

**A7.** Să se arate că dacă o ecuație reciprocă de gradul 4 cu coeficienți în corpul K admite soluția $\alpha \in K^*$, atunci ea admite și soluția $\alpha^{-1} \in K$. Generalizare.

**A8.** Să se rezolve ecuațiile reciproce în $\mathbb{C}$:

a) $x^6 - x^4 - x^2 + 1 = 0$;

b) $x^6 - x^5 + 3x^4 - 6x^3 + 3x^2 - x + 1 = 0$.

**A9.** Să se determine $a \in \mathbb{R}$ știind că ecuația $z^3 + az^2 + az + 1 = 0$ are numai soluții reale.

**A10.** Pentru ce valori ale lui $a \in \mathbb{R}$ ecuația reciprocă $x^4 + x^2 + ax + x + 1 = 0$ are toate soluțiile reale?

**A11.** Să se rezolve în mulțimea $\mathbb{C}$ ecuațiile de grad superior:

a) $x^4 + x^3 + 2x^2 + 2x + 4 = 0$;

b) $x^4 + x^3 - 24x^2 - 6x + 36 = 0$;

c) $x^4 + x^3 - 4a^2x^2 + ax + a^2 = 0$.

**A12.** Să se rezolve ecuațiile în mulțimea $\mathbb{C}$:

a) $(x-1)^4 + (x+1)^4 = 82$;

b) $(x+a)^4 + (x-a)^4 = b$, $a, b \in \mathbb{R}$;

c) $(x+a)^4 + (x+b)^4 = c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$;

d) $\left(x^2 + x + 1\right)^2 + 1 = 0$;

e) $(x+a)\left(x^3 + a^3\right) = x^2$, $a \in \mathbb{R}$.

**A13.** Să se rezolve ecuația:

$$\log_x^2 6 + \log_{\frac{1}{6}}^2\left(\frac{1}{x}\right) + \log_{\frac{1}{\sqrt{x}}}\left(\frac{1}{6}\right) + \log_{\sqrt{6}} x + \frac{3}{4} = 0.$$

*(Admitere, ASE, București)*

**A14.** Să se calculeze:

$\sin\frac{2\pi}{5}$, $\sin\frac{\pi}{10}$, $\cos\frac{\pi}{10}$.

## TESTE DE EVALUARE

### Testul 1

**❍1.** Polinomul $f = X^4 - 4X^3 + 4X^2 + mX + n \in \mathbb{Q}[X]$ se divide cu polinomul $g = X^2 - 4X + 3 \in \mathbb{Q}[X]$, pentru:

a) $\begin{cases} m = -4 \\ n = 3 \end{cases}$; b) $\begin{cases} m = -4 \\ n = 4 \end{cases}$; c) $\begin{cases} m = 4 \\ n = -3 \end{cases}$; d) $\begin{cases} m = 2 \\ n = -1 \end{cases}$.

*(Univ. Maritimă, Constanța, 2002)*
*(3 puncte)*

**❍2.** Se consideră polinomul $f = X^3 + mX^2 + 2X + m - 1 \in \mathbb{R}[X]$, având rădăcinile $x_1, x_2, x_3$.

a) Să se arate că $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -m^3 + 3m + 3$.

b) Să se determine m pentru care $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 \geq 3(x_1x_2x_3)^2$.

c) Să se determine m pentru care polinomul f se divide cu $X - 1$ și, în acest caz, să se găsească rădăcinile sale.

*(Univ. București, Facultatea de Matematică și Informatică, 2002)*
*(4 puncte)*

**❍3.** Să se rezolve ecuația $x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x - 2 = 0$ în mulțimea $\mathbb{C}$, știind că admite ca rădăcină numărul $x_1 = 1 - \sqrt{3}$.

*(Univ. de Nord, Baia-Mare, 2002)*
*(3 puncte)*

## Testul 2

❍1. Se consideră polinomul $f = X^4 - X^3 + X^2 - X + 1$, cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$.

a) Să se calculeze $f(1)$ și $f(-1)$.

b) Să se determine $a \in \mathbb{C}$, astfel încât să avem identitatea $f = a(X - x_1)(X - x_2)(X - x_3)(X - x_4)$.

c) Să se arate că $(1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_3)(1 - x_4) = 1$.

d) Să se arate că $(1 + x_1)(1 + x_2)(1 + x_3)(1 + x_4) = 5$.

*(Bacalaureat, iulie 2002)*
*(4 puncte)*

❍2. Fie $f = X^4 - 7X^3 + (m + 13)X^2 - (4m + 3)X + m \in \mathbb{C}[X]$. Să se rezolve ecuația $\tilde{f}(x) = 0$, știind că $m \in \mathbb{Q}$, admite soluția $x_1 = 2 + \sqrt{3}$, iar $x_3 = 2x_4$.

*(Univ. Lucian Blaga, Sibiu, 1998)*
*(3 puncte)*

❍3. Să se descompună în factori ireductibili peste $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ polinomul $f = X^4 + X^3 - X^2 - 2X - 2$, știind că admite rădăcina $z_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

*(Univ. Babeș Bolyai, Cluj-Napoca, 1996)*
*(3 puncte)*

## Testul 3

❍1. Să se determine rădăcinile $x_1, x_2, x_3$ ale polinomului $f = X^3 - mX^2 - 2 \in \mathbb{C}[X]$, dacă $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = 0$.

*(Univ. Lucian Blaga, Sibiu, 2002)*
*(3 puncte)*

❍2. Ecuația $x^4 - x^3 + mx^2 + 2x + n = 0$, $m, n \in \mathbb{R}$ admite soluția $x_1 = 1 + i$ pentru:

a) $m = 2, n = -3$; b) $m = 0, n = 2$; c) $m = -1, n = 0$;
d) $m = 1, n = 4$; e) $m = n = 0$.

*(Univ. Maritimă, Constanța, 2000)*
*(3 puncte)*

❍3. Se consideră ecuația $x^4 - (m - 1)x^3 + mx^2 - (m - 1)x + 1 = 0$.
Fie $M = \{m \in \mathbb{R} \mid \text{ecuația are două rădăcini reale, distincte și negative}\}$.
Atunci:

a) $M = (-\infty, 0)$; b) $M = [0, +\infty)$; c) $M = (-\infty, -1]$; d) $M = (-1, 1)$; e) $M = \varnothing$.

*(ASE, Cibernetică, 1997)*
*(3 puncte)*

# ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

# I. PRIMITIVE

*În clasa a XI-a* s-a văzut că noțiunea de derivată a unei funcții a fost introdusă pornind de la câteva considerente practice. Astfel, în domeniul fizicii, viteza instantanee a unui mobil este descrisă de o funcție care reprezintă derivata funcției „spațiu".

Fizica experimentală ridică însă și problema oarecum inversă celei de derivată, în sensul că impune determinarea proprietăților unei funcții care modelează un fenomen, folosind valori ale derivatei rezultate dintr-un experiment.

Relativ la astfel de situații practice a apărut conceptul de „integrală". Denumirea de „integrală" rezultă din ideea deducerii unei concluzii asupra întregului, idee formulată având în vedere concluzii asupra părților întregului, (integer = întreg, în limba latină).

## 1 Probleme care conduc la noțiunea de integrală

**Problema spațiului parcurs de un mobil în mișcarea rectilinie**

Se consideră un punct mobil M care se deplasează rectiliniu, în același sens, pe o axă, cu viteza instantanee la momentul x egală cu $v(x)$. Dacă $S(x)$ este distanța parcursă de mobil de la momentul inițial $t=0$ la momentul $t=x$, atunci, conform definiției vitezei instantanee, are loc egalitatea $v(x)=S'(x)$.

Problema se poate pune însă și invers: dacă se cunoaște viteza instantanee $v(x)$ în fiecare moment x, atunci se poate determina distanța parcursă de mobil în intervalul de timp $[0, x]$?

Din punct de vedere matematic, problema revine la a studia dacă există o funcție S care verifică egalitatea $S'(x)=v(x)$. Cu alte cuvinte, problema revine la a determina funcția când se cunoaște derivata sa, determinare care face obiectivul capitolelor următoare.

**Problema ariei unei suprafețe plane**

Se consideră $f:[a, b]\to\mathbb{R}$ o funcție continuă și pozitivă.

Se notează cu S funcția care asociază fiecărui $x\in[a, b]$ aria $S(x)$ a suprafeței plane mărginite de curba $y=f(x)$, axa Ox pe intervalul $[a, x]$ și segmentele $[AA']$, $[MM']$ unde $A(a, 0)$, $A'(a, f(a))$, $M(x, 0)$, $M'(x, f(x))$, (figura 1).

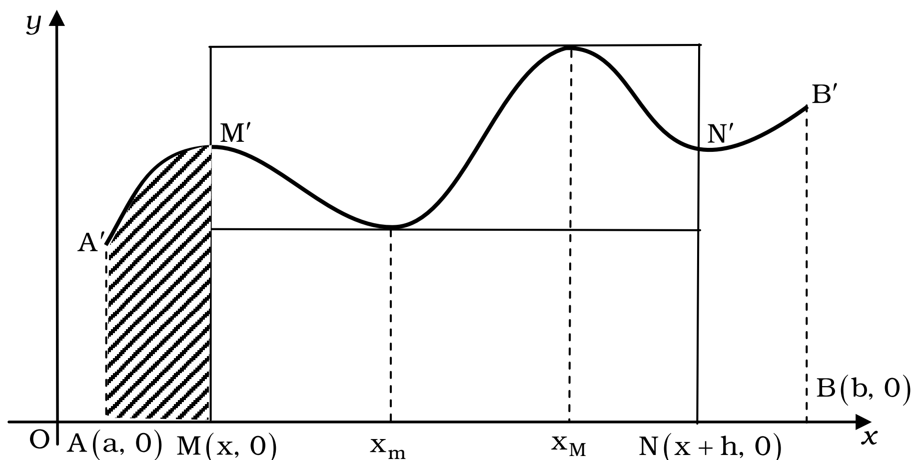



*Figura 1*

Funcția S, numită funcția „arie“, este derivabilă pe intervalul $[a, x]$.

Într-adevăr, fie $N\in Ox, N(x+h, 0), h>0$ și $x_m, x_M\in[x, x+h]$ puncte în care f ia valoare minimă, respectiv valoare maximă pe intervalul $[x, x+h]$.

Deoarece aria suprafeței curbilinii $[MM'N'N]$ este cuprinsă între ariile dreptunghiurilor cu baza $[MN]$ și cu înălțimile egale cu $f(x_m)$, respectiv $f(x_M)$, au loc relațiile:

$h\cdot f(x_m)\le S(x+h)-S(x)\le h\cdot f(x_M)$. De aici se obține:

$$f(x_m)\le\frac{S(x+h)-S(x)}{h}\le f(x_M).\ (1)$$

Pentru $h\to 0$ avem: $\lim\limits_{h\to 0} f(x_m)=f(x)=\lim\limits_{h\to 0} f(x_M)$.

Prin trecere la limită după $h\to 0$ în relația (1) și folosind definiția derivatei se obține:

$$S'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{S(x+h)-S(x)}{h}=f(x).$$

Așadar, funcția S este derivabilă și $S'(x)=f(x),\ x\in[a,b]$, (2), relație care exprimă derivata funcției „arie“ cu ajutorul funcției f.

O problemă care se pune în legătură cu relația (2) este: „Să se determine aria suprafeței plane asociate funcției f pe un interval $[a,b]$, în ipoteza că se cunoaște derivata sa.“.

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) a notat această arie cu simbolul $\int_a^b f(x)dx$, citit „integrală de la a la b din $f(x)dx$“.

Rezolvarea deplină a problemelor care cer determinarea funcției când se cunoaște derivata sa se va face introducând noile concepte matematice: „primitivă“ și „integrală definită“.



*Gotffried Wilhelm LEIBNIZ*
*(1646-1716)*
*matematician german*

*Este creatorul calculului diferențial și integral, având contribuții remarcabile în analiza combinatorie, calculul probabilităților, aritmetică și mecanică.*

## 2 Primitivele unei funcții Integrala nedefinită a unei funcții

Fie $I\subset\mathbb{R}$ un interval de numere reale și funcția $f:I\to\mathbb{R}$.

### ❖ DEFINIȚII

- Funcția $f:I\to\mathbb{R}$ **admite primitive pe intervalul I** dacă există o funcție $F:I\to\mathbb{R}$ astfel încât:
  **a)** F este funcție derivabilă pe intervalul I;
  **b)** $F'(x)=f(x),\ \forall x\in I$.
- Funcția F cu proprietățile de mai sus se numește **funcția primitivă** (sau **antiderivată**) a funcției f pe intervalul I.
- Dacă funcția F există, se spune că funcția f este **primitivabilă** pe intervalul I.

☞ ***Exemple***

- Funcția nulă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=0$, admite primitive pe $\mathbb{R}$.
  Într-adevăr, pentru orice număr real c, funcția $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ F(x)=c$ este funcție derivabilă pe $\mathbb{R}$ și $F'(x)=0=f(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$.

- Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2$. Funcțiile $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, F(x)=\frac{x^3}{3}$ și $G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $G(x)=\frac{x^3}{3}+k, k\in\mathbb{R}$, sunt primitive ale funcției f pe $\mathbb{R}$.

  Într-adevăr, funcțiile F și G sunt derivabile pe $\mathbb{R}$ și $F'(x)=x^2=G'(x)=f(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$.
- Funcția $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, F(x)=\ln x$ este o primitivă a funcției $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x}$.

  De asemenea $G:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, G(x)=\ln x+1$ este o primitivă a funcției f pe $(0,+\infty)$.

Din exemplele de mai sus se observă că funcțiile alese admit mai multe primitive pe intervalul de definiție. Relația dintre diferitele primitive ale unei funcții pe un interval este dată de următorul rezultat:

**▣ TEOREMA 1**

Fie $I\subset\mathbb{R}$ un interval și funcția $f:I\to\mathbb{R}$.

Dacă $F_1, F_2:I\to\mathbb{R}$ sunt două primitive ale funcției f pe intervalul I, atunci există o constantă $c\in\mathbb{R}$ astfel încât $F_1(x)-F_2(x)=c$, $\forall x\in I$.

*Demonstrație*

Funcțiile $F_1, F_2$ fiind primitive ale funcției f pe intervalul I, sunt derivabile pe I și $F_1'(x)=f(x)=F_2'(x)$, $\forall x\in I$.

Folosind operațiile cu funcții derivabile, rezultă că funcția $F_1-F_2$ este derivabilă și $(F_1-F_2)'(x)=F_1'(x)-F_2'(x)=0$, $\forall x\in I$.

Deoarece funcția $F_1-F_2$ are derivata nulă pe intervalul I, din consecința teoremei lui Lagrange rezultă că există $c\in\mathbb{R}$ astfel încât $(F_1-F_2)(x)=c$, $\forall x\in I$.

Așadar $F_1(x)-F_2(x)=c$, $\forall x\in I$. ■

Teorema afirmă că două primitive ale unei funcții primitivabile pe un interval diferă printr-o constantă. Dacă F este o primitivă a funcției $f:I\to\mathbb{R}$, atunci orice altă primitivă G a lui f este de forma $G=F+c$, unde c este funcție constantă pe I.

**❑ NE REAMINTIM!**

**Consecință a teoremei lui LAGRANGE**

**Fie $f, g:I\to\mathbb{R}$, funcții derivabile pe intervalul I, astfel încât $f'(x)=g'(x)$, $\forall x\in I$. Atunci, există $c\in\mathbb{R}$, astfel încât $f-g=c$. (Funcțiile f și g diferă printr-o constantă.)**

Se deduce astfel că dacă funcția f admite o primitivă, atunci admite o infinitate de primitive.

## ❖ DEFINIȚII

Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval și $f : I \to \mathbb{R}$ o funcție care admite primitive pe I.

- Mulțimea tuturor primitivelor funcției f pe intervalul I se numește **integrala nedefinită** a funcției f și se notează $\int \mathbf{f(x)dx}$.
- Operația prin care se determină mulțimea primitivelor unei funcții se numește **operația de integrare**.

## ➲ OBSERVAȚII

Fie $f : I \to \mathbb{R}$ o funcție primitivabilă și F o primitivă a funcției f pe I.

**1.** Din teorema 1 se deduce că mulțimea primitivelor funcției f pe intervalul I satisface egalitatea:

$\int f(x)dx = \{F + c \mid c \text{ este funcție constantă}\}$.

**2.** Dacă se notează $\mathscr{C} = \{c : I \to \mathbb{R} \mid c \text{ este funcție constantă}\}$, atunci

$\int f(x)dx = F + \mathscr{C}$.

*Precizări*

- Dacă $\mathscr{F}(I) = \{f \mid f : I \to \mathbb{R}\}$ și $\mathscr{F}, \mathscr{G} \subset \mathscr{F}(I)$, se definesc operațiile:

**a)** $\mathscr{F} + \mathscr{G} = \{f + g \mid f \in \mathscr{F}, g \in \mathscr{G}\}$;

**b)** $\lambda\mathscr{F} = \{\lambda f \mid f \in \mathscr{F}\}, \lambda \in \mathbb{R}$;

**c)** $f + \mathscr{G} = \{f + h \mid h \in \mathscr{G}\}, f \in \mathscr{F}(I)$.

- Pentru mulțimea $\mathscr{C}$ a funcțiilor constante pe intervalul I au loc egalitățile:

$\mathscr{C} + \mathscr{C} = \mathscr{C}$; $\lambda\mathscr{C} = \mathscr{C}$, pentru $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

**3.** Cu ajutorul notațiilor utilizate pentru integrala nedefinită, cele trei exemple conduc la următoarele egalități:

$\int 0\,dx = \mathscr{C}, x \in \mathbb{R}$;

$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + \mathscr{C}, x \in \mathbb{R}$;

$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + \mathscr{C}, x \in (0, +\infty)$.

# 3 Proprietăți ale integralei nedefinite

**▣ TEOREMA 2 (proprietatea de aditivitate a integralei nedefinite)**

Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval și $f, g: I \to \mathbb{R}$ două funcții care admit primitive pe I. Atunci funcția sumă $f+g: I \to \mathbb{R}$ admite primitive pe intervalul I și are loc egalitatea:

$\int [f(x)+g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$

*Demonstrație* *(extindere)*

Fie $F, G: I \to \mathbb{R}$ primitive ale funcțiilor f, g pe intervalul I. Funcțiile F și G sunt derivabile pe I și $F' = f$ și $G' = g$. Folosind operațiile cu funcții derivabile pe un interval, rezultă că funcția $F+G$ este funcție derivabilă pe I și are loc egalitatea $(F+G)' = F' + G' = f + g.$

Așadar, funcția $f+g$ admite primitive pe intervalul I și funcția $F+G$ este o primitivă a acesteia pe intervalul I.

Totodată au loc următoarele egalități:

$\int f(x)dx = F + \mathscr{C},$ (1)

$\int g(x)dx = G + \mathscr{C},$ (2)

$\int [f(x)+g(x)]dx = (F+G) + \mathscr{C}.$ (3)

Folosind relația $\mathscr{C} + \mathscr{C} = \mathscr{C}$ și egalitățile (1), (2), (3) se obține:

$\int f(x)dx + \int g(x)dx = (F+\mathscr{C}) + (G+\mathscr{C}) = (F+G) + (\mathscr{C}+\mathscr{C}) = (F+G) + \mathscr{C} =$

$= \int [f(x)+g(x)]dx.$ ■

**▣ TEOREMA 3**

Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție care admite primitive pe I și $\lambda \in \mathbb{R}$. Atunci funcția $\lambda f$ admite primitive pe I, iar pentru $\lambda \neq 0$ are loc egalitatea $\int (\lambda f)(x)dx = \lambda \int f(x)dx,$ (4).

*Demonstrație*

Fie F o primitivă a funcției f pe intervalul I. Rezultă că F este funcție derivabilă pe I și $F' = f.$ Conform operațiilor cu funcții derivabile se obține că funcția $\lambda F$ este derivabilă pe I și $(\lambda F)' = \lambda F' = \lambda f.$ Așadar, funcția $\lambda f$ admite primitive pe intervalul I și funcția $\lambda F$ este o primitivă a ei.

Totodată are loc egalitatea:

$\int(\lambda f)(x)dx = \lambda F + \mathscr{C}.$

Din faptul că $\lambda\mathscr{C} = \mathscr{C}, \forall \lambda \in \mathbb{R}^*$, se obține:

$\lambda\int f(x)dx = \lambda(F + \mathscr{C}) = \lambda F + \mathscr{C} = \int(\lambda f)(x)dx$ și teorema este demonstrată. ■

**➲ OBSERVAȚII**

**1.** Pentru $\lambda = 0$, egalitatea (4) nu este adevărată. Într-adevăr, pentru $\lambda = 0$ avem: $\int(\lambda f)(x)dx = \int 0\,dx = \mathscr{C}$, iar $\lambda\int f(x)dx = 0\cdot\int f(x)dx = \{0\}$.

**2.** Pentru $\lambda \in \mathbb{R}$ are loc egalitatea: $\int(\lambda f)(x)dx = \lambda\int f(x)dx + \mathscr{C}$.

**▣ CONSECINȚĂ (Proprietatea de liniaritate a integralei nedefinite)**

Fie $f, g : I \to \mathbb{R}$ funcții care admit primitive pe intervalul I și $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, numere nesimultan nule.

Atunci funcția $\alpha f + \beta g$ admite primitive pe I și are loc egalitatea:

$\int(\alpha f + \beta g)(x)dx = \alpha\int f(x)dx + \beta\int g(x)dx.$

## *Exerciții rezolvate*

☒ **1.** Să se determine funcția $f : D \to \mathbb{R}$ pentru care o primitivă a sa este de forma:

**a)** $F(x) = e^x\left(x^2 + 6x\right),\ x \in \mathbb{R};$

**b)** $F(x) = \dfrac{2 - x}{\sqrt{1 + x^2}}\cdot e^{\operatorname{arctg} x},\ x \in \mathbb{R};$

**c)** $F(x) = \arccos\dfrac{1 - x^2}{1 + x^2},\ x > 0.$

<u>*Soluție*</u>

Se aplică definiția primitivei unei funcții, arătând că funcția F este funcție derivabilă și $F'(x) = f(x)$.

**a)** Funcția F este derivabilă pe $\mathbb{R}$ ca produs de funcții derivabile și

$$f(x) = F'(x) = \left[e^x\left(x^2 + 6x\right)\right]' = e^x\cdot\left(x^2 + 6x\right) + e^x\cdot(2x + 6),\ x \in \mathbb{R}.$$

Rezultă că $f(x) = e^x\left(x^2 + 8x + 6\right),\ x \in \mathbb{R}.$

**b)** Funcția F este derivabilă pe $\mathbb{R}$ fiind exprimată cu ajutorul operațiilor cu funcții derivabile.

Avem: $f(x)=F'(x)=\left(\frac{2-x}{\sqrt{1+x^2}}\right)'\cdot e^{\operatorname{arctg} x}+$

$+\frac{2-x}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\left(e^{\operatorname{arctg} x}\right)'=$

$=\frac{-\sqrt{1+x^2}-(2-x)\cdot\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}\cdot e^{\operatorname{arctg} x}+$

$+\frac{2-x}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{1}{1+x^2}\cdot e^{\operatorname{arctg} x}=$

$=e^{\operatorname{arctg} x}\cdot\frac{1-3x}{\left(1+x^2\right)\sqrt{1+x^2}},\ x\in\mathbb{R}.$

❑ **NE REAMINTIM!**

$(f\cdot g)'=f'\cdot g+f\cdot g'$

$\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'\cdot g-f\cdot g'}{g^2}$

$\left(\sqrt{u}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot u'$

$(\operatorname{arctg} u)'=\frac{1}{1+u^2}\cdot u'$

$(\arccos u)'=\frac{-1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$

**c)** Funcția F este derivabilă pe intervalul $(0,+\infty)$ și:

$$f(x)=F'(x)=\frac{-1}{\sqrt{1-\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}}\cdot\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)'=\frac{-\left(1+x^2\right)}{\sqrt{4x^2}}\cdot\frac{-4x}{\left(1+x^2\right)^2}=\frac{2}{1+x^2},\ x>0.$$

☒ **2.** Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=e^{2x}\cdot\sin x$. Să se determine constantele reale m și n astfel încât funcția $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ F(x)=e^{2x}(m\sin x+$ $+n\cos x)$ să fie o primitivă a funcției f pe $\mathbb{R}$.

*Soluție*

Din ipoteza că F este o primitivă a funcției f, rezultă că F este derivabilă și $F'(x)=f(x),\ \forall\ x\in\mathbb{R}$.

Se obține egalitatea:

$e^{2x}\left[(2m-n)\sin x+(m+2n)\cos x\right]=e^{2x}\sin x,\ \forall\ x\in\mathbb{R}.$

Pentru $x=0$, se obține $m+2n=0$, iar pentru $x=\frac{\pi}{2}$, se obține $2m-$ $-n=1$. Rezultă, în final, că $m=\frac{2}{5}$ și $n=-\frac{1}{5}$, valori care verifică condițiile din enunț.

☒ **3.** Să se studieze dacă funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases} e^x, & x\geq 0 \\ 2x+m, & x<0 \end{cases}$ admite primitive pe $\mathbb{R}$, unde $m\in\mathbb{R}$.

*Soluție*

O primitivă a funcției $f_1:[0,+\infty)\to\mathbb{R}, f_1(x)=e^x$ este funcția:

$F_1:[0,+\infty)\to\mathbb{R}, F_1(x)=e^x+c_1$.

O primitivă a funcției $f_2:(-\infty,0)\to\mathbb{R}, f_2(x)=2x+m,$ este funcția:

$F_2:(-\infty,0)\to\mathbb{R}, F_2(x)=x^2+mx+c_2$.

Rezultă că o primitivă a funcției f pe $\mathbb{R}$ va avea forma:

$$F(x)=\begin{cases} e^x+c_1, & x\in[0,+\infty) \\ x^2+mx+c_2, & x\in(-\infty,0) \end{cases}.$$

Constantele $c_1$ și $c_2$ vor fi determinate astfel încât funcția F să fie derivabilă pe $\mathbb{R}$, în particular să fie continuă pe $\mathbb{R}$. Astfel, condiția de continuitate în $x=0$, $\lim\limits_{x\to 0}F(x)=F(0)$, conduce la egalitățile $1+c_1=c_2=c$.

Rezultă că $F(x)=\begin{cases} e^x+c-1, & x\geq 0 \\ x^2+mx+c, & x<0 \end{cases}$.

Condiția de derivabilitate a funcției F în $x=0$ conduce la egalitățile $F_d'(0)=1=F_s'(0)=m$.

Așadar, existența primitivelor pentru funcția f depinde de valorile parametrului m:

• pentru $m=1$, funcția f admite primitive pe $\mathbb{R}$ și o primitivă este funcția $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, F(x)=\begin{cases} e^x-1+c, & x\geq 0 \\ x^2+x+c, & x<0 \end{cases}$;

• pentru $m\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$, funcția f nu admite primitive pe $\mathbb{R}$.

## ➢ COMENTARIU METODIC

Din problema rezolvată anterior se conturează câteva idei care vizează existența sau neexistența primitivelor unei funcții.

**a)** Pentru $m=1$, funcția f este continuă pe $\mathbb{R}$ și admite primitive pe $\mathbb{R}$.

Mai general, are loc următorul rezultat:

**Orice funcție continuă $f:I\to\mathbb{R}$ admite primitive pe intervalul I.**

**b)** Pentru $m \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ funcția f are discontinuități de speța I și nu are primitive pe $\mathbb{R}$.

Mai general, are loc următorul rezultat:

**Orice funcție $f : I \to \mathbb{R}$ care are discontinuități de speța I nu admite primitive pe intervalul I.**

**c)** Deoarece funcția f are discontinuități de speța I pe $\mathbb{R}$, nu are proprietatea lui Darboux pe $\mathbb{R}$.

**Mai general, dacă o funcție $f : I \to \mathbb{R}$ nu are proprietatea lui Darboux pe intervalul I, atunci nu are primitive pe I.**

❑ **TEMĂ**

**Au primitive funcțiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:**

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2+1}, & x < 1 \\ \ln\sqrt{ex}, & x \geq 1 \end{cases}$;

b) $f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$;

c) $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ -1, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$?

## EXERCIȚII ȘI PROBLEME

### EXERSARE

**E1.** **Să se determine funcția $f : D \to \mathbb{R}$ pentru care o primitivă a sa este de forma:**

a) $F(x) = 2x^3 - 4x^2 - 5x + 9,\ x \in \mathbb{R}$;

b) $F(x) = \sqrt[3]{x^2} + 4x^2\sqrt{x},\ x \in (0, +\infty)$;

c) $F(x) = x \sin x,\ x \in \mathbb{R}$;

d) $F(x) = x(\ln x - 1),\ x \in (0, +\infty)$;

e) $F(x) = \frac{x^3 - 2x}{x+1},\ x \in (0, +\infty)$;

f) $F(x) = e^x(x-1) + 4,\ x \in \mathbb{R}$;

g) $F(x) = \mathrm{tg}^2 x + \mathrm{tg}\, x,\ x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$.

**E2.** **Să se verifice dacă funcția $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,**

$$F(x) = \begin{cases} \frac{2^x}{\ln 2} + x - \frac{2}{\ln 2}, & x \leq 1 \\ \frac{x^2}{2} + 2x - \frac{3}{2}, & x > 1 \end{cases}$$

**este primitivă a funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,**

$$f(x) = \begin{cases} 2^x + 1, & x \leq 1 \\ x + 2, & x > 1 \end{cases}.$$

**E3.** **Se consideră funcțiile $F_1, F_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,**

$$F_1(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + 1, & x \leq 0 \\ e^x + 1, & x > 0 \end{cases},$$

$$F_2(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x, & x \leq 0 \\ e^x - 1, & x > 0 \end{cases}.$$

**Sunt aceste funcții primitive ale funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,**

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & x > 0 \\ x^2 + x + 1, & x \leq 0 \end{cases}?$$

**E4.** **Folosind afirmația că o funcție continuă pe un interval admite primitive pe acest interval, să se arate că următoarele funcții admit primitive pe domeniul de definiție:**

a) $f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 3,\ x \in \mathbb{R}$;

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$;

c) $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$;

d) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 3x}{x^2+x}, & x>0\\ 3, & x=0\end{cases}$;

e) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2x+1}-1}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$.

**E5.** Pentru funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x^2+2x$, să se determine primitiva $F$ care verifică relația $F(-1)=2$.

## APROFUNDARE

**A1.** Să se determine funcțiile $f:D\to\mathbb{R}$, care au primitive de forma:

a) $F(x)=x\left(\ln^2 x-\ln x^2+1\right)$, $x\in(0,+\infty)$;

b) $F(x)=e^{x+1}\left(x^2-4x\right)$, $x\in\mathbb{R}$;

c) $F(x)=2x\sin x+2\cos x-x^2$, $x\in\mathbb{R}$;

d) $F(x)=\dfrac{x}{2}\sqrt{9-x^2}+\dfrac{9}{2}\arcsin\dfrac{x}{3}$, $x\in(-3,3)$;

e) $F(x)=\dfrac{x}{2}\sqrt{x^2+1}+\dfrac{1}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$, $x\in\mathbb{R}$;

f) $F(x)=\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\left(\ln x-\dfrac{1}{n+1}\right)$, $x>0$;

g) $F(x)=\dfrac{\left[\sin(\ln x)+\cos(\ln x)\right]\cdot x}{2}$, $x>0$;

h) $F(x)=\arcsin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)-2\arcsin x$, $x\in(-1,1)$;

i) $F(x)=\dfrac{1}{3}\left(\ln\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\cdot\operatorname{arctg}\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)$, $x>0$.

**A2.** Funcțiile $F_k:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $k\in\{1,2,3\}$ și $F_1(x)=\dfrac{x}{2}+\dfrac{3}{16}\sin\left(\dfrac{4x}{3}\right)-\dfrac{3\sqrt{3}}{16}\cos\left(\dfrac{4x}{3}\right)$,

$F_2(x)=\dfrac{x}{2}-\dfrac{3}{4}\sin\left(\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{2x}{3}\right)$,

$F_3(x)=\dfrac{x}{2}-\dfrac{3}{8}\cos\left(\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{4x}{3}\right)$, sunt primitive ale funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\cos^2\left(\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{2x}{3}\right)$?

**A3.** Să se arate că următoarele funcții admit primitive pe domeniul de definiție:

a) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{4x^5-5x^4+1}{(x-1)^2}, & x<1\\ 7x^2+4x-1, & x\geq 1\end{cases}$;

b) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{x^2}-1}{x^4+x^2}, & x<0\\ x^3-3x^2+1, & x\geq 0\end{cases}$;

c) $f(x)=\begin{cases}e^x+\ln x, & x\in(0,1]\\ x^{\frac{1}{x-1}}, & x\in(1,+\infty)\end{cases}$;

d) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1-\cos x^2}}{1-\cos x}, & x\in[-1,1]\setminus\{0\}\\ \sqrt{2}, & x=0\end{cases}$;

e) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\cos x+|x-1|e^{nx}}{1+e^{nx}}$.

**A4.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} e^{x+1}, & x\le -1 \\ 2+x, & x>-1 \end{cases}$. Să se arate că f admite primitive pe $\mathbb{R}$ și să se determine o primitivă F cu proprietatea că $F(2)=\frac{3}{2}$.

**A5.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\max\{1, x^2\}$. Să se arate că f admite primitive pe $\mathbb{R}$ și să se determine o primitivă F care verifică relația: $4F\left(-\frac{3}{2}\right)-3F\left(\frac{1}{2}\right)=3F(2)$.

**A6.** Să se determine constantele $a, b\in\mathbb{R}$ astfel încât funcția $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=\begin{cases} \ln^2 x, & x\in(0, e] \\ ax+b, & x\in(e,+\infty) \end{cases}$ să fie primitivă a unei funcții.

**A7.** Se consideră funcția $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=\begin{cases} x^2+ax+3, & x\le 1 \\ \dfrac{3x+b}{x^2+2}, & x>1 \end{cases}$.

Există valori pentru $a, b\in\mathbb{R}$ astfel încât funcția F să fie antiderivata unei funcții?

**A8.** Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x-1}{\sqrt{x}}$.

Să se determine constantele $a, b\in\mathbb{R}$ astfel încât funcția $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=(ax+b)\sqrt{x}$ să fie o antiderivată a funcției f.

**A9.** Fie funcțiile $f, g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{x+1}-\ln(x+1)$ și $g(x)=\frac{1}{x}\left[c+bx+a\ln(x+1)\right]$.

Există valori ale constantelor $a, b, c\in\mathbb{R}$ astfel încât funcția g să fie o primitivă a funcției $h:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $h(x)=\frac{f(x)}{x^2}$?

**A10.** Se consideră funcția $f:[0, 3]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x^2+ax+b, & x\in[0, 1] \\ 2x+1, & x\in(1, 2) \\ x+3a, & x\in[2, 3] \end{cases}$. Să se determine $a, b\in\mathbb{R}$ astfel încât f să admită primitive pe $[0, 3]$.

**A11.** Să se afle constantele $a, b\in\mathbb{R}$ astfel încât funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases} e^{x-1}+\ln x, & x\in(0, 1) \\ ax+b, & x\in[1, 2] \\ \sqrt{3x-2}-2\sqrt{x+2}, & x\in(2,+\infty) \end{cases}$$

să admită primitive pe $(0,+\infty)$.

**A12.** Să se arate că următoarele funcții $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ nu admit primitive pe $\mathbb{R}$, dacă:

a) $f(x)=[x]$;

b) $f(x)=[x]-2x$;

c) $f(x)=\operatorname{sgn} x$;

d) $f(x)=\begin{cases} x+1, & x<0 \\ \sin x, & x\ge 0 \end{cases}$;

e) $f(x)=\begin{cases} |x|, & x\in\mathbb{Q} \\ x^2, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$.

## DEZVOLTARE

**D1.** **Se consideră funcția $f:[a, b] \to \mathbb{R}$ și $c \in (a, b)$. Dacă f admite primitive pe intervalele $[a, c]$ și $[c, b]$, să se arate că f admite primitive pe $[a, b]$.**

**D2.** **Să se arate că următoarele funcții admit primitive și să se determine o primitivă dacă:**

**a)** $f(x) = |x-2|,\ x \in \mathbb{R}$;

**b)** $f(x) = |x-1| + |x+1|,\ x \in \mathbb{R}$.

**D3.** **Fie $f: I \to \mathbb{R}$ o funcție care admite primitive pe I. Dacă $a \in I$ și $g: I \to \mathbb{R},\ g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in I \setminus \{a\} \\ b, & x = a \text{ și } b \neq f(a) \end{cases}$, să se arate că funcția g nu admite primitive pe I.**

# 4 Primitive uzuale

O problemă esențială care se pune relativ la noul concept de „primitivă a unei funcții“ este aceea a determinării mulțimii primitivelor pentru o clasă cât mai largă de funcții.

Fie I un interval de numere reale și $f: I \to \mathbb{R}$ o funcție care admite primitive pe I.

Dacă $F: I \to \mathbb{R}$ este o primitivă a ei, atunci F este o funcție derivabilă și $F'(x) = f(x),\ \forall\ x \in I$.

Astfel, definiția primitivei dă posibilitatea determinării acesteia în strânsă legătură cu folosirea formulelor de derivare învățate în clasa a XI-a.

Ca urmare, apar următoarele posibilități:

## 4.1. Primitive deduse din derivatele funcțiilor elementare

Ilustrăm acest procedeu prin câteva exemple:

**a)** Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin x$.

Avem $(\sin x)' = \cos x,\ x \in \mathbb{R}$, și astfel se obține $\int \cos x\, dx = \sin x + \mathscr{C}$.

**b)** Fie $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \ln x$.

Avem $(\ln x)' = \frac{1}{x},\ x \in (0, +\infty)$, și se obține $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + \mathscr{C}$.

**c)** Fie $f: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R},\ f(x) = \operatorname{tg} x$.

Avem $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ și se obține $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + \mathscr{C}$.

Procedând analog pentru alte funcții, se obține următorul tabel de integrale nedefinite.

| Nr. crt. | Funcția | Mulțimea primitivelor (integrala nedefinită) |
|---|---|---|
| **1.** | $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^n,\ n\in\mathbb{N}$ | $\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+\mathcal{C}$ |
| **2.** | $f:I\to\mathbb{R},\ f(x)=x^r,\ I\subset(0,+\infty),$ $r\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ | $\int x^r dx=\frac{x^{r+1}}{r+1}+\mathcal{C}$ |
| **3.** | $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=a^x,\ a>0,\ a\neq 1$ | $\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+\mathcal{C}$ |
| **4.** | $f:I\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{1}{x},\ I\subset\mathbb{R}^*$ | $\int \frac{1}{x}dx=\ln\lvert x\rvert+\mathcal{C}$ |
| **5.** | $f:I\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{1}{x^2-a^2},$ $I\subset\mathbb{R}\setminus\{\pm a\},\ a\neq 0$ | $\int\frac{1}{x^2-a^2}dx=\frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert+\mathcal{C}$ |
| **6.** | $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{1}{x^2+a^2},a\neq 0$ | $\int\frac{1}{x^2+a^2}dx=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+\mathcal{C}$ |
| **7.** | $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\sin x$ | $\int \sin x\,dx=-\cos x+\mathcal{C}$ |
| **8.** | $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\cos x$ | $\int \cos x\,dx=\sin x+\mathcal{C}$ |
| **9.** | $f:I\to\mathbb{R},\ f(x)=\operatorname{tg}x,$ $I\subset\mathbb{R}\setminus\left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\ \middle\vert\ k\in\mathbb{Z}\right\}$ | $\int \operatorname{tg}x\,dx=-\ln\lvert\cos x\rvert+\mathcal{C}$ |
| **10.** | $f:I\to\mathbb{R},\ f(x)=\operatorname{ctg}x,$ $I\subset\mathbb{R}\setminus\{k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\}$ | $\int \operatorname{ctg}x\,dx=\ln\lvert\sin x\rvert+\mathcal{C}$ |
| **11.** | $f:I\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{1}{\cos^2 x},$ $I\subset\mathbb{R}\setminus\left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\ \middle\vert\ k\in\mathbb{Z}\right\}$ | $\int\frac{1}{\cos^2 x}dx=\operatorname{tg}x+\mathcal{C}$ |
| **12.** | $f:I\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{1}{\sin^2 x},$ $I\subset\mathbb{R}\setminus\{k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\}$ | $\int\frac{1}{\sin^2 x}dx=-\operatorname{ctg}x+\mathcal{C}$ |

| | | |
|---|---|---|
| **13.** | $f: I \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, $I \subset (-a, a)$, $a > 0$ | $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + \mathscr{C}$ |
| **14.** | $f: I \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}$, $I \subset (-\infty, -a)$ sau $I \subset (a, +\infty)$ | $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \ln\left\| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right\| + \mathscr{C}$ |
| **15.** | $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}$, $a \neq 0$ | $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = \ln\left( x + \sqrt{x^2 + a^2} \right) + \mathscr{C}$ |

### *Exercițiu rezolvat*

☒ Să se determine integralele nedefinite pentru următoarele funcții folosind proprietățile integralei nedefinite și tabelul de integrale nedefinite:

**a)** $f(x) = x^3 - 3x^2 + \sqrt{x},\ x > 0;$

**b)** $f(x) = \dfrac{\cos 2x - 3}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x},\ x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right);$

**c)** $f(x) = \dfrac{\sqrt{1 - x^2} + \sqrt{x^2 + 6}}{\sqrt{(x^2 + 6)(1 - x^2)}},\ x \in (-1, 1);$

**d)** $f(x) = \dfrac{x^4 + 8x^2 + 17}{x^2 + 4},\ x \in \mathbb{R}.$

<u>*Soluție*</u>

**a)** Avem $\displaystyle\int \left(x^3 - 3x^2 + \sqrt{x}\right) dx = \int x^3 dx - \int 3x^2 dx + \int \sqrt{x} dx = \frac{x^4}{4} -$

$$-3\int x^2 dx + \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^4}{4} - 3 \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + \mathscr{C} = \frac{x^4}{4} - x^3 + \frac{2}{3} \cdot x\sqrt{x} + \mathscr{C}.$$

**b)** Se prelucrează expresia de la numărător și rezultă:

$$\cos 2x - 3 = \cos^2 x - \sin^2 x - 3\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right) = -2\cos^2 x - 4\sin^2 x.$$

Mulțimea de primitive va fi:

$$\int \frac{\cos 2x - 3}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx = \int \frac{-2\cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx + \int \frac{-4\sin^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = -2\int \frac{1}{\sin^2 x} dx -$$

$$-4\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = 2\operatorname{ctg} x - 4\operatorname{tg} x + \mathscr{C}.$$

**c)** Se distribuie numitorul comun la termenii numărătorului și se obține:

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}+\sqrt{x^2+6}}{\sqrt{\left(x^2+6\right)\left(1-x^2\right)}}dx = \int\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+6}}+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx = \int \frac{1}{\sqrt{x^2+6}}dx +$$

$$+\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \ln\left(x+\sqrt{x^2+6}\right)+\arcsin x+\mathscr{C}.$$

**d)** Avem: $\int \frac{x^4+8x^2+17}{x^2+4}dx = \int \frac{\left(x^2+4\right)^2+1}{x^2+4}dx = \int\left(x^2+4\right)dx+\int \frac{dx}{x^2+4} =$

$$= \frac{x^3}{3}+4x+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+\mathscr{C}.$$

## 4.2. Primitive deduse din derivarea funcțiilor compuse

Ilustrăm procedeul prin câteva exemple:

**a)** Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval, $u: I \to \mathbb{R}$ funcție derivabilă pe I și $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin u(x)$.

Avem $f'(x) = \left(\sin u(x)\right)' = \cos u(x)\cdot u'(x)$.

Rezultă că $\sin u(x)$ este primitivă pentru $\cos u(x)\cdot u'(x)$, deci

$$\int \cos u(x)\cdot u'(x)dx = \sin u(x)+\mathscr{C}.$$

**b)** Fie $u: I \to (0, +\infty)$ funcție derivabilă pe I și $f:(0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln u(x)$. Avem $f'(x) = \left(\ln u(x)\right)' = \frac{u'(x)}{u(x)}$ și ca urmare se obține:

$$\int \frac{u'(x)}{u(x)}dx = \ln\left|u(x)\right|+\mathscr{C}.$$

În mod analog se pot obține integralele nedefinite și pentru alte funcții obținute prin derivarea unor funcții compuse.

Astfel, dacă $u : I \to J$ este funcție derivabilă pe intervalul I, se obține următorul tabel de integrale nedefinite.

| Nr. crt. | Integrala nedefinită |
|---|---|
| **1.** | $\int u^n(x)\cdot u'(x)dx = \frac{u^{n+1}(x)}{n+1} + \mathscr{C},\ n \in \mathbb{N}$ |
| **2.** | $\int u^r(x)\cdot u'(x)dx = \frac{u^{r+1}(x)}{r+1} + \mathscr{C},\ r \in \mathbb{R} \setminus \{-1\},\ u(I) \subset (0, +\infty)$ |
| **3.** | $\int a^{u(x)}\cdot u'(x)dx = \frac{a^{u(x)}}{\ln a} + \mathscr{C},\ a \in (0, +\infty) \setminus \{1\}$ |
| **4.** | $\int \frac{u'(x)}{u(x)}dx = \ln\lvert u(x)\rvert + \mathscr{C},\ u(x) \neq 0,\ x \in I$ |
| **5.** | $\int \frac{u'(x)}{u^2(x)-a^2}dx = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{u(x)-a}{u(x)+a}\right\rvert + \mathscr{C},\ u(x) \neq \pm a,\ \forall\ x \in I,\ a \neq 0$ |
| **6.** | $\int \frac{u'(x)}{u^2(x)+a^2}dx = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u(x)}{a} + \mathscr{C},\ a \neq 0$ |
| **7.** | $\int \sin u(x)\cdot u'(x)dx = -\cos u(x) + \mathscr{C}$ |
| **8.** | $\int \cos u(x)\cdot u'(x)dx = \sin u(x) + \mathscr{C}$ |
| **9.** | $\int \operatorname{tg} u(x)\cdot u'(x)dx = -\ln\lvert\cos u(x)\rvert + \mathscr{C},\ u(x) \neq (2k+1)\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z},\ x \in I$ |
| **10.** | $\int \operatorname{ctg} u(x)\cdot u'(x)dx = \ln\lvert\sin u(x)\rvert + \mathscr{C},\ u(x) \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z},\ x \in I$ |
| **11.** | $\int \frac{u'(x)}{\cos^2 u(x)}dx = \operatorname{tg} u(x) + \mathscr{C},\ u(x) \neq (2k+1)\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z},\ x \in I$ |
| **12.** | $\int \frac{u'(x)}{\sin^2 u(x)}dx = -\operatorname{ctg} u(x) + \mathscr{C},\ u(x) \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z},\ x \in I$ |
| **13.** | $\int \frac{u'(x)}{\sqrt{a^2-u^2(x)}}dx = \arcsin\frac{u(x)}{a} + \mathscr{C},\ a > 0,\ u(I) \subset (-a, a)$ |
| **14.** | $\int \frac{u'(x)}{\sqrt{u^2(x)-a^2}}dx = \ln\left\lvert u(x)+\sqrt{u^2(x)-a^2}\right\rvert + \mathscr{C},\ a > 0,\ u(I) \subset (-\infty, -a)$ sau $u(I) \subset (a, +\infty)$ |
| **15.** | $\int \frac{u'(x)}{\sqrt{u^2(x)+a^2}}dx = \ln\left[u(x)+\sqrt{u^2(x)+a^2}\right] + \mathscr{C},\ a \neq 0$ |

În general are loc următorul rezultat:

**▣ TEOREMA 4 (formula de schimbare de variabilă)**

Fie I, J intervale din $\mathbb{R}$ și funcțiile $I \xrightarrow{u} J \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ cu proprietățile:
**a)** u este funcție derivabilă pe intervalul I;
**b)** f admite primitive pe intervalul J.
Dacă F este o primitivă a funcției f, atunci funcția $(f \circ u) \cdot u'$ admite primitive pe I și $\int f(u(x)) \cdot u'(x)\,dx = F \circ u + \mathscr{C}$.

## *Exerciții rezolvate*

☒ **1.** Să se calculeze $\int \frac{2x+3}{x^2+3x+4}\,dx,\ x \in \mathbb{R}$.

<u>*Soluție*</u>

Alegem funcția $u : \mathbb{R} \to \left[\frac{7}{4}, +\infty\right),\ u(x) = x^2 + 3x + 4,$ derivabilă pe $\mathbb{R}$.

Se obține $u'(x) = 2x + 3$ și $\frac{2x+3}{x^2+3x+4} = \frac{u'(x)}{u(x)},\ x \in \mathbb{R}$.

Rezultă că $\int \frac{2x+3}{x^2+3x+4}\,dx = \int \frac{u'(x)}{u(x)}\,dx = \ln|u(x)| + \mathscr{C} = \ln\left(x^2+3x+4\right) + \mathscr{C}$.

☒ **2.** Să se calculeze $\int 4x^3\left(x^4-2\right)^3 dx,\ x \in \mathbb{R}$.

<u>*Soluție*</u>

Alegem funcția $u:\mathbb{R}\to[-2, +\infty),\ u(x) = x^4 - 2,$ derivabilă, cu $u'(x) = 4x^3$, $x \in \mathbb{R}$. Rezultă că $4x^3\left(x^4-2\right)^3 = u'(x)\cdot u^3(x)$ și $\int 4x^3\left(x^4-2\right)^3 dx =$
$= \int u'(x)\cdot u^3(x)\,dx = \frac{u^4(x)}{4} + \mathscr{C} = \frac{1}{4}\cdot\left(x^4-2\right)^4 + \mathscr{C}$.

☒ **3.** Să se calculeze $\int 2x \cdot \sqrt[3]{x^2+1}\,dx,\ x \in \mathbb{R}$.

<u>*Soluție*</u>

Alegem funcția $u:\mathbb{R}\to[1, +\infty),\ u(x) = x^2+1,$ derivabilă pe $\mathbb{R}$, cu $u'(x) =$ $= 2x,\ x \in \mathbb{R}$. Rezultă că $\int 2x\cdot\sqrt[3]{x^2+1}\,dx = \int u'(x)\cdot[u(x)]^{\frac{1}{3}}dx = \frac{[u(x)]^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + \mathscr{C} =$

$= \frac{3}{4}\cdot[u(x)]^{\frac{4}{3}} + \mathscr{C} = \frac{3}{4}\cdot\left(x^2+1\right)\sqrt[3]{\left(x^2+1\right)} + \mathscr{C}$.

## 4.3. Primitive deduse din formula de derivare a produsului a două funcții

Fie $f, g: I \to \mathbb{R}$ funcții derivabile pe intervalul I, cu derivatele continue. Atunci $(fg)' = f'g + fg'$. Rezultă că fg este o primitivă a funcției $f'g + fg'$, iar mulțimea primitivelor verifică egalitatea:

$\int [f'(x)g(x) + f(x)g'(x)]dx = f(x)g(x) + \mathscr{C}$ sau

$\int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) + \mathscr{C}$. (1)

Din egalitatea (1) se obține:

$\int f(x)g'(x)dx = f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)g(x)dx.$ (2)

Egalitatea (2) se numește **formula de integrare prin părți**.

*Exercițiu rezolvat*

☒ Să se calculeze:

**a)** $\int x\ln x\,dx,\ x > 0$; **b)** $\int x\sin x\,dx,\ x \in \mathbb{R}$; **c)** $\int \text{arctg}\,x\,dx,\ x \in \mathbb{R}$.

Soluție

**a)** Integrala se scrie:

$$\int x\ln x\,dx = \int \left(\frac{x^2}{2}\right)' \ln x\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}(\ln x)'\,dx = \frac{x^2}{2}\cdot \ln x -$$

$$-\int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int x\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + \mathscr{C}.$$

**b)** Avem: $\int x\sin x\,dx = \int x\cdot(-\cos x)'\,dx = -x\cos x - \int x'\cdot(-\cos x)dx =$

$= -x\cos x + \int \cos x\,dx = -x\cos x + \sin x + \mathscr{C}.$

**c)** Avem: $\int \text{arctg}\,x\,dx = \int x'\cdot \text{arctg}\,x\,dx = x\,\text{arctg}\,x - \int x\cdot(\text{arctg}\,x)'\,dx =$

$$= x\,\text{arctg}\,x - \int \frac{x}{1+x^2}dx = x\,\text{arctg}\,x - \frac{1}{2}\int \frac{(1+x^2)'}{1+x^2}dx = x\,\text{arctg}\,x -$$

$$-\frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \mathscr{C}.$$

# EXERCIȚII ȘI PROBLEME

## EXERSARE

**E1.** Să se determine mulțimea primitivelor următoarelor funcții:

a) $f(x) = x^4,\ x \in \mathbb{R};$

b) $f(x) = 8x^7,\ x \in \mathbb{R};$

c) $f(x) = x^{\frac{4}{5}},\ x > 0;$

d) $f(x) = \sqrt[5]{x^3},\ x \in \mathbb{R};$

e) $f(x) = x^{-\frac{8}{3}},\ x > 0;$

f) $f(x) = 11x \cdot \sqrt[4]{x^3},\ x > 0;$

g) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}},\ x > 0;$

h) $f(x) = e^x,\ x \in \mathbb{R};$

i) $f(x) = 2^x,\ x \in \mathbb{R};$

j) $f(x) = \dfrac{1}{x-1},\ x > 1;$

k) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 9},\ x \in (-3,\ 3);$

l) $f(x) = \dfrac{1}{16 + x^2},\ x \in \mathbb{R};$

m) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 4}},\ x \in (-\infty,\ -2);$

n) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4 - x^2}},\ x \in (-2,\ 2);$

o) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 25}},\ x \in \mathbb{R};$

p) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{(6-x)(6+x)}},\ x \in (0,\ 6).$

**E2.** Să se calculeze integralele nedefinite:

a) $\int \left(5x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 6x + 1\right) dx,\ x \in \mathbb{R};$

b) $\int \left(x^2 - 2x\right)^3 dx,\ x \in \mathbb{R};$

c) $\int \left(\dfrac{2}{x^3} - \dfrac{4}{x^5} - \dfrac{3}{x}\right) dx,\ x < 0;$

d) $\int \left(8x^2\sqrt{x} + 7x\sqrt[4]{x^3}\right) dx,\ x > 0;$

e) $\int \left(\dfrac{x}{\sqrt[3]{x^7}} - 21x^4\sqrt[4]{x}\right) dx,\ x > 0;$

f) $\int \dfrac{1}{4x^2 - 1} dx,\ x > \dfrac{1}{2};$

g) $\int \dfrac{30}{9x^2 - 25} dx,\ x > \dfrac{5}{3};$

h) $\int \dfrac{8}{4x^2 + 1} dx,\ x \in \mathbb{R};$

i) $\int \dfrac{18}{3x^2 + 27} dx,\ x \in \mathbb{R};$

j) $\int \left(5^x \ln 5 - 4^x \ln 16\right) dx,\ x \in \mathbb{R};$

k) $\int \dfrac{1}{\sqrt{6x^2 + 24}} dx,\ x \in \mathbb{R};$

l) $\int \dfrac{1}{\sqrt{2x^2 - 18}} dx,\ x > 3;$

m) $\int \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{48 - 3x^2}} dx,\ x \in (-2,\ 2).$

**E3.** Să se calculeze integralele nedefinite:

a) $\int (3\sin x + 4\cos x)\, dx,\ x \in \mathbb{R};$

b) $\int \left(2\sin^2 x - \sqrt[3]{-8}\cos^2 x\right) dx,\ x \in \mathbb{R};$

c) $\int 2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}\, dx,\ x \in \mathbb{R};$

d) $\int 2\cos^2\dfrac{x}{2}\, dx,\ x \in \mathbb{R};$

e) $\int 2\sin^2\dfrac{x}{2}\, dx,\ x \in \mathbb{R}.$

## APROFUNDARE

**A1. Să se determine integralele nedefinite:**

a) $\int \frac{3x^5 + x^2 + x - 1}{x^3} dx, x > 0;$

b) $\int \frac{2x^3 - x^4}{\sqrt{x}} dx, \ x > 0;$

c) $\int \left(x\sqrt[5]{x} - \sqrt[3]{x^2} - x\sqrt[4]{x}\right) dx, \ x > 0;$

d) $\int \frac{x\sqrt[3]{x} + 2x^2\sqrt[4]{x^2}}{\sqrt{x}} dx, \ x > 0;$

e) $\int \left(2^x \ln\sqrt[3]{4} - \ln 3 \cdot 9^x\right) dx, \ x \in \mathbb{R};$

f) $\int \left(\frac{1}{3 + x^2} - \frac{1}{\sqrt{3 + x^2}}\right) dx, \ x \in \mathbb{R};$

g) $\int \frac{(x-1)^4}{x^2} dx, \ x > 1;$

h) $\int \frac{\sqrt{x^2 + 4} - 1}{x^2 + 4} dx, \ x \in \mathbb{R};$

i) $\int \frac{\sqrt{x^2 - 4} + 4}{x^2 - 4} dx, \ x > 2;$

j) $\int \frac{\sqrt{2 - x^2} + \sqrt{x^2 + 2}}{\sqrt{4 - x^4}} dx,$
$x \in \left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right);$

k) $\int \frac{2x + 1}{\sqrt{x^2 - 16}} dx, \ x > 4.$

**A2. Să se calculeze:**

a) $\int \frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx, \ x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right);$

b) $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} dx, \ x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right);$

c) $\int \left(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right)^2 dx, \ x \in \mathbb{R};$

d) $\int \frac{\sin^3 x - 8}{1 - \cos^2 x} dx, \ x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right);$

e) $\int \frac{3\cos 2x + 1}{\sin^2 2x} dx, \ x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right);$

f) $\int \left(1 + \operatorname{tg}^2 x\right) dx, \ x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right);$

g) $\int \left(1 + \operatorname{ctg}^2 x\right) dx, \ x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$

**A3. Să se calculeze mulțimile de primitive:**

$I_1 = \int \frac{x^4 + x^2 + 1}{x^2 - x + 1} dx, \ x \in \mathbb{R};$

$I_2 = \int \frac{x^3 - 1}{x^2 + x + 1} dx, \ x \in \mathbb{R};$

$I_3 = \int \frac{(x+1)^6 + (x-1)^6}{x^2 + 1} dx, \ x \in \mathbb{R}.$

**A4. Să se calculeze:**

a) $\int 6x\left(3x^2 + 1\right)^7 dx, \ x \in \mathbb{R};$

b) $\int x^4\left(1 - x^5\right)^5 dx, \ x \in \mathbb{R};$

c) $\int x^4\sqrt[3]{x^5 + 1} dx, \ x \in \mathbb{R};$

d) $\int \frac{3x^2}{\sqrt{x^3 + 1}} dx, \ x > 0;$

e) $\int \frac{1}{x} \ln^4 x \, dx, \ x > 0;$

f) $\int \frac{2x - 5}{x^2 - 5x + 7} dx, \ x \in \mathbb{R};$

g) $\int \frac{x - 1}{3x^2 - 6x + 11} dx, \ x \in \mathbb{R};$

h) $\int \frac{2x}{x^4 - 1} dx, \ x \in (-1, 1);$

i) $\int \frac{x^2}{16 - x^6} dx, \ x > 2;$

j) $\int \frac{x}{x^2 + 9} dx, \ x \in \mathbb{R};$

k) $\int \frac{x}{x^4 + 1} dx, \ x \in \mathbb{R};$

l) $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^6 - 25}} dx, \ x > 5;$

m) $\int \frac{3^x}{\sqrt{1 - 9^x}} dx;$

n) $\int \frac{x + x^3}{1 + x^4} dx, \ x \in \mathbb{R}.$

**A5. Să se calculeze:**

a) $\int \frac{\text{arctg}^6 x}{1+x^2}dx,\ x\in\mathbb{R};$

b) $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x-4}dx,\ x\in\mathbb{R};$

c) $\int \frac{\sin x}{9-\cos^2 x}dx,\ x\in\mathbb{R};$

d) $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x+4}dx,\ x\in\mathbb{R};$

e) $\int 2x\sin\left(x^2+1\right)\cos\left(x^2+1\right)dx,$ $x\in\mathbb{R};$

f) $\int 4x\sin 2\left(x^2+1\right)dx,\ x\in\mathbb{R};$

g) $\int\left(\text{tg}^3 x+\text{tg}\,x\right)dx,\ x\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right);$

h) $\int \frac{\cos x}{\sqrt{4-\sin^2 x}}dx,\ x\in\mathbb{R};$

i) $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{\sin^4 x+1}}dx,\ x\in\mathbb{R};$

j) $\int \sin^3 x\cdot\cos^2 x\,dx,\ x\in\mathbb{R}.$

**A6. Să se calculeze integralele nedefinite, folosind formula de integrare prin părți:**

a) $\int x^2\ln x\,dx,\ x>0;$

b) $\int xe^{-x}dx,\ x>0;$

c) $\int \sin^2 x\,dx,\ x\in\mathbb{R};$

d) $\int (x+1)\cos x\,dx,\ x\in\mathbb{R};$

e) $\int \sqrt{x^2+25}\,dx,\ x\in\mathbb{R};$

f) $\int x\sqrt{x^2-9}\,dx,\ x>3;$

g) $\int \frac{x}{\cos^2 x}dx,\ x\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right);$

h) $\int x\,\text{arctg}\,x\,dx,\ x\in\mathbb{R}.$

## TESTE DE EVALUARE

### Testul 1

**❍1.** **Fie funcțiile $f,\ g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=e^x\sin x,\ g(x)=e^x\cos x.$ Să se arate că:**
**a) f este primitivă a funcției $f+g$;**
**b) g este primitivă a funcției $g-f$.**

***(3 puncte)***

**❍2.** **Se consideră funcțiile $f,\ F:(0,+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\left(x^2-1\right)\ln x$ și $F(x)=$ $=x\left(ax^2-1\right)\ln x-x\left(\frac{x^2}{9}-b\right)$. Să se determine constantele $a,\ b\in\mathbb{R}$ astfel încât F să fie o primitivă a lui f pe $(0,+\infty)$.**

***(3 puncte)***

**❍3.** **Să se determine mulțimea primitivelor pentru $f:D\to\mathbb{R}$, dacă:**

a) $f(x)=(x-1)^2(x+1),\ x\in\mathbb{R};$

b) $f(x)=\frac{1}{9x^2-1}-x\sqrt{x},\ x>1;$

c) $f(x)=x^2e^x,\ x\in\mathbb{R}.$

***(3 puncte)***

## Testul 2

❍**1.** **Să se arate că funcția** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}2x+3, & x\ge 0\\ \sqrt{x^2+6x+9}, & x<0\end{cases}$ **admite primitive pe** $\mathbb{R}$ **și să se determine primitiva F care verifică relația** $F(0)+F(-3)=-4,5.$

*(3 puncte)*

❍**2.** **Să se demonstreze în două moduri că funcția** $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\ln(1+\ln x)$ **este o primitivă a funcției** $g:(1,+\infty)\to\mathbb{R},\ g(x)=\dfrac{1}{x(1+\ln x)}.$

*(3 puncte)*

❍**3.** **Să se determine integralele nedefinite:**

a) $\displaystyle\int\frac{x+2}{\sqrt{x^2+1}}dx,\ x\in\mathbb{R};$

b) $\displaystyle\int(x+2)e^x dx,\ x\in\mathbb{R};$

c) $\displaystyle\int\sin x\cos x\,dx,\ x\in\mathbb{R}.$

*(3 puncte)*

## Testul 3

❍**1.** **Fie** $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2+ax,\ g(x)=bxf(x).$ **Să se determine** $a,b\in\mathbb{R}$ **pentru care funcția g este o primitivă a funcției f.**

*(3 puncte)*

❍**2.** **Să se arate că** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}(1-x)^2\cdot e^{-x}, & x\in(-\infty,1]\\ \dfrac{\ln^2 x}{x}, & x\in(1,+\infty)\end{cases}$ **admite primitive pe** $\mathbb{R}$ **și să se determine primitiva F care verifică relația** $F(e)+F(0)=\dfrac{-2(e+3)}{3e}.$

*(3 puncte)*

❍**3.** **Să se calculeze:**

a) $\displaystyle\int(\sin x+\cos x)^2\,dx,\ x\in\mathbb{R};$

b) $\displaystyle\int\frac{\sqrt{4-25x^2}+1}{4-25x^2}dx,\ x\in\left(-\frac{2}{5},\frac{2}{5}\right);$

c) $\displaystyle\int\frac{1}{\cos^4 x}dx,\ x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right].$

*(3 puncte)*

# II. INTEGRALA DEFINITĂ

## 1 Diviziuni ale unui interval $[a, b]$

Fie $[a, b]$ un interval de numere reale, închis și mărginit (compact).

### ❖ DEFINIȚII

- Se numește **diviziune** a intervalului $[a, b]$ un sistem finit de puncte $\Delta = (x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n)$ astfel încât $a = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b$.
- Punctele $x_0, x_1, ..., x_n$ se numesc **puncte de diviziune** sau **nodurile** diviziunii $\Delta$, iar intervalele $[x_0, x_1], [x_1, x_2], ..., [x_{n-1}, x_n]$ se numesc **intervale de diviziune**.
- Sistemul de puncte $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$, $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{1, n}$ se numește **sistem de puncte intermediare** asociat diviziunii $\Delta$.

☞ ***Exemplu***

◆ Se consideră intervalul $[0, 1]$.

Sistemele finite de puncte: $\Delta_1 = (0, 1)$, $\Delta_2 = \left(0, \frac{1}{2}, 1\right)$, $\Delta_3 = \left(0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1\right)$, $\Delta_4 = \left(0, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, 1\right)$ sunt diviziuni ale intervalului $[0, 1]$.

Sistemele $\xi = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{5}\right)$ și $\xi' = \left(\frac{1}{6}, \frac{5}{12}, \frac{7}{12}, 1\right)$ sunt sisteme de puncte intermediare asociate diviziunilor $\Delta_2$, respectiv $\Delta_3$.

### ➲ OBSERVAȚII

**1.** Ca mulțimi de puncte, diviziunile din exemplul dat au proprietatea $\Delta_1 \subset \Delta_2 \subset \Delta_3 \subset \Delta_4$.

**2.** Dacă $\Delta', \Delta''$ sunt două diviziuni ale intervalului $[a, b]$ și $\Delta' \subset \Delta''$, se spune că $\Delta''$ **este mai fină** decât $\Delta'$. În acest sens, pentru exemplul de mai sus se poate spune că $\Delta_2$ este mai fină decât $\Delta_1$, $\Delta_3$ este mai fină decât $\Delta_1$ și decât $\Delta_2$, iar $\Delta_4$ este mai fină decât $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$.

❖ **DEFINIȚIE**

• Fie $\Delta = (x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n)$ o diviziune a intervalului $[a, b]$.
Se numește **norma diviziunii** $\Delta$ cea mai mare dintre lungimile intervalelor de diviziune $[x_0, x_1], [x_1, x_2], ..., [x_{n-1}, x_n]$.

Se notează $\|\Delta\| \overset{def}{=} \max\limits_{1 \le i \le n}(x_i - x_{i-1})$.

Pentru diviziunile din exemplul anterior avem:
$\|\Delta_1\| = 1, \|\Delta_2\| = \frac{1}{2}, \|\Delta_3\| = \frac{1}{3}, \|\Delta_4\| = \frac{1}{4}$.

Se observă că prin trecere la o diviziune mai fină, norma diviziunii se micșorează.

❖ **DEFINIȚIE**

• Diviziunea $\Delta = (x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n)$ a intervalului $[a, b]$ se numește **diviziune echidistantă** dacă toate intervalele de diviziune $[x_0, x_1], [x_1, x_2], ..., [x_{n-1}, x_n]$ au aceeași lungime.

În acest caz, $\|\Delta\| = \frac{b-a}{n}$.

☞ ***Exemple***

- Sistemul de puncte $\Delta = (0, 1, 2, ..., n-1, n)$ este diviziune echidistantă a intervalului $[0, n]$ cu norma 1.
- Diviziunile $\Delta_1 = \left(0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, ..., \frac{n-1}{n}, 1\right), \Delta_2 = \left(0, \frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}, ..., \frac{2^n-1}{2^n}, \frac{2^n}{2^n}\right)$ sunt diviziuni echidistante ale intervalului $[0, 1]$ cu $\|\Delta_1\| = \frac{1}{n}$ și $\|\Delta_2\| = \frac{1}{2^n}$.

# 2 Sume Riemann

Fie $[a, b] \subset \mathbb{R}$ un interval închis și mărginit și următoarele obiecte matematice:

**a)** funcția $f : [a, b] \to \mathbb{R}$;

**b)** diviziunea $\Delta = (x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n)$ a intervalului $[a, b]$;

**c)** sistemul de puncte intermediare $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ asociat diviziunii $\Delta$.

❖ **DEFINIȚIE**

• Se numește **sumă Riemann** sau **sumă integrală** asociată funcției f, diviziunii Δ și sistemului de puncte intermediare ξ, numărul real $\sigma_\Delta(f, \xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$.

☞ ***Exemple***

**1.** Dacă $f:[a, b] \to \mathbb{R}, f(x) = c,$ atunci orice sumă Riemann asociată este egală cu $c(b-a)$.

**2.** Fie $f:[0, 2] \to \mathbb{R}, f(x) = x+1, \Delta = \left(0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2\right)$ și $\xi = \left(0, 1, \frac{5}{4}, 2\right)$.

Atunci $\sigma_\Delta(f, \xi) = \sum_{i=1}^{4} f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) =$

$= f(0) \cdot \left(\frac{1}{2} - 0\right) + f(1) \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{5}{4}\right) \cdot \left(\frac{3}{2} - 1\right) +$

$+ f(2) \cdot \left(2 - \frac{3}{2}\right) = 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{9}{4} \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{33}{8}.$



*Bernhard RIEMANN*
*(1826-1866)*
*matematician german*

*Este unul dintre creatorii calculului diferențial și integral. A adus contribuții importante în geometria neeuclidiană.*

## Interpretarea geometrică a sumei Riemann

Fie funcția continuă $f:[a, b] \to [0, +\infty)$, $\Delta = (x_0, x_1, ..., x_{n-1}, x_n)$ o diviziune a intervalului $[a, b]$, iar $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ un sistem de puncte intermediare asociat diviziunii Δ.

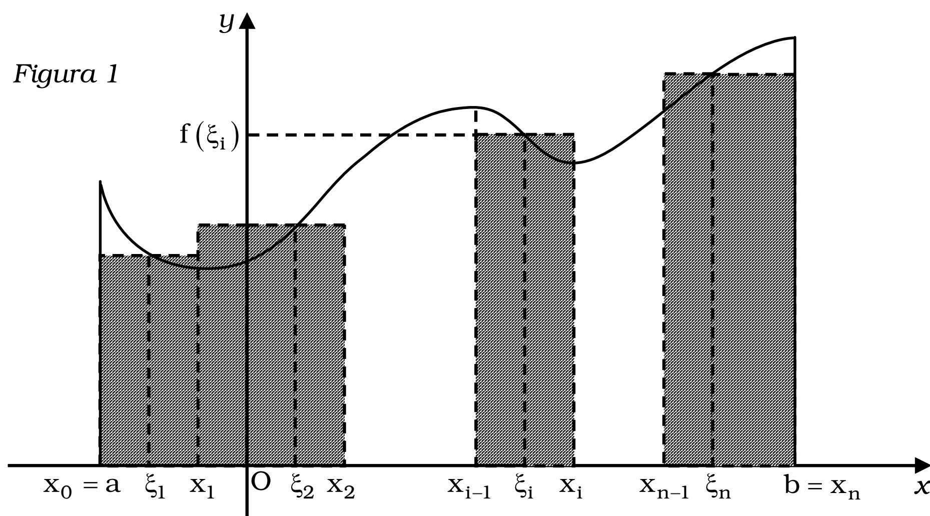



*Figura 1*

Mulțimea de puncte din plan delimitată de curba $y = f(x)$, axa Ox și dreptele $x = a$, $x = b$ se numește subgraficul funcției f și se notează:

$$\Gamma_f = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; a \le x \le b, 0 \le y \le f(x)\right\}.$$

Se observă că suma Riemann asociată funcției f, diviziunii $\Delta$ și sistemului de puncte intermediare $\xi$ reprezintă suma ariilor suprafețelor dreptunghiulare cu baza $(x_i - x_{i-1})$ și înălțimea $f(\xi_i)$, $1 \le i \le n$, figura 1. Așadar, $\sigma_\Delta(f, \xi)$ realizează o aproximare a ariei subgraficului $\Gamma_f$ al funcției f.

De asemenea, se poate observa intuitiv că dacă diviziunea $\Delta$ este mai fină, atunci aproximarea ariei subgraficului este „mai bună".

## 3 Integrabilitatea unei funcții pe un interval $[a, b]$

Fie $a, b \in \mathbb{R}$ și $a < b$.

❖ **DEFINIȚII**

- Funcția $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ se numește **funcție integrabilă Riemann** pe intervalul $[a, b]$ sau **funcție integrabilă** pe intervalul $[a, b]$, dacă există un număr real I astfel încât pentru orice șir $(\Delta_n)$ de diviziuni ale intervalului $[a, b]$, $\Delta_n = \left(x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, ..., x_{k_n-1}^{(n)}, x_{k_n}^{(n)}\right)$, cu $\lim\limits_{n\to\infty} \|\Delta_n\| = 0$ și orice șir de puncte intermediare $\xi^{(n)} = \left(\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, ..., \xi_{k_n-1}^{(n)}, \xi_{k_n}^{(n)}\right)$, $x_{i-1}^{(n)} \le \xi_i^{(n)} \le x_i^{(n)}, 1 \le i \le k_n, n \in \mathbb{N}$, șirul de sume integrale corespunzător este convergent către I.

- Numărul I se numește **integrala definită** sau **integrala** funcției f pe intervalul $[a, b]$, se notează cu $\boldsymbol{\int_a^b f(x)\,dx}$ și se citește „integrală de la a la b din $f(x)dx$".

  Așadar, $I = \lim\limits_{n\to\infty} \sigma_{\Delta_n}\left(f, \xi^{(n)}\right) = \int_a^b f(x)\,dx.$

- Simbolul $\int$ se numește **semnul de integrare** sau semnul integralei.

- Numerele a și b se numesc **limite** sau **capete de integrare**; a este limita de integrare inferioară, iar b este limita de integrare superioară.
- Intervalul $[a, b]$ se numește **interval de integrare**.
- Funcția f se numește **funcția de integrat**, iar x se numește **variabila de integrare**.

Variabila de integrare poate fi notată cu orice literă.

Astfel, $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(u)du = \int_a^b f(t)dt$ etc.

Variabila de integrare este independentă de capetele de integrare. Este incorect să se scrie $\int_a^b f(a)da$ sau $\int_a^b f(b)db$.

## ➲ OBSERVAȚII

**1.** Numărul $\int_a^b f(x)dx$ este unic determinat, limita unui șir convergent de numere reale fiind unică.

**2.** Integrala definită a unei funcții integrabile pe un interval $[a, b]$ este un număr real, în timp ce integrala nedefinită a funcției f pe intervalul $[a, b]$ este o mulțime de funcții (mulțimea primitivelor funcției f pe intervalul $[a, b]$).

**3.** Dacă $f:[a, b] \to \mathbb{R}$ este o funcție integrabilă, atunci, prin definiție

$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ și $\int_a^b f(x)dx = 0$ dacă $a = b$.

**4.** Orice funcție integrabilă pe intervalul $[a, b]$ este mărginită. Așadar, există $m, M \in \mathbb{R}$ astfel încât $m \le f(x) \le M, \forall x \in [a, b]$.

În consecință, **dacă funcția $f:[a, b] \to \mathbb{R}$ nu este mărginită, atunci nu este integrabilă pe $[a, b]$.**

☞ ***Exemplu***

- Funcția $f:[0, 1] \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \in (0, 1] \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ este funcție nemărginită deoarece

$\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty$. Rezultă că funcția f nu este integrabilă pe $[0, 1]$.

☞ ***Exemplu de funcție integrabilă***

- Fie $f:[a, b] \to \mathbb{R}, f(x) = c$ o funcție constantă. Funcția f este integrabilă pe $[a, b]$ și $\int_a^b f(x)dx = c(b-a)$.

Într-adevăr, fie $(\Delta_n)$, $\Delta_n = \left(x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, ..., x_{k_n-1}^{(n)}, x_{k_n}^{(n)}\right)$ un șir oarecare de diviziuni ale intervalului $[a, b]$, cu $\|\Delta_n\| \to 0$ și $\left(\xi^{(n)}\right)$ un șir oarecare de puncte intermediare, cu proprietatea $x_{i-1}^{(n)} \le \xi_i^{(n)} \le x_i^{(n)}$, $i = \overline{1, k_n}$. Atunci $\sigma_{\Delta_n}\left(f, \xi^{(n)}\right) = \sum_{i=1}^{k_n} f\left(\xi_i^{(n)}\right)\left(x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}\right) = = c \cdot \sum_{i=1}^{k_n}\left(x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}\right) = c(b-a)$. Rezultă că șirul $\sigma_{\Delta_n}\left(f, \xi^{(n)}\right)$ este convergent și $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_{\Delta_n}\left(f, \xi^{(n)}\right) = c(b-a) = \int_a^b f(x)dx$.

În concluzie, orice funcție constantă pe intervalul $[a, b]$ este integrabilă pe intervalul $[a, b]$ și $\int_a^b c\,dx = c(b-a)$.

☞ ***Exemplu de funcție care nu este integrabilă***

- Fie $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q} \\ 0, & x \in [0, 1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \end{cases}$, (funcția lui Dirichlet).

Arătăm că funcția f nu este integrabilă pe $[0, 1]$.

Fie $\Delta_n = \left(0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, ..., \frac{n-1}{n}, 1\right)$ o diviziune a intervalului $[0, 1]$ cu $\|\Delta_n\| = \frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\to} 0$.

Alegem două sisteme de puncte intermediare astfel:

$\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$, $\xi_i \in \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right] \cap \mathbb{Q}$, pentru care $f(\xi_i) = 1$, $i = \overline{1, n}$;

$\xi' = \left(\xi_1', \xi_2', ..., \xi_n'\right)$, $\xi_i' \in \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right] \cap \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, pentru care $f\left(\xi_i'\right) = 0$, $i = \overline{1, n}$.

Avem $\sigma_{\Delta_n}(f, \xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \frac{1}{n}\left(\underbrace{1+1+...+1}_{n \text{ ori}}\right) = 1$ și $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_{\Delta_n}(f, \xi) = 1$.

$\sigma_{\Delta_n}(f, \xi') = \sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_i'\right)(x_i - x_{i-1}) = \frac{1}{n}\left(\underbrace{0+0+...+0}_{n \text{ ori}}\right) = 0$ și $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_{\Delta_n}(f, \xi') = 0$.

Deoarece cele două limite sunt diferite, rezultă că funcția f nu este integrabilă pe $[0, 1]$.

Un rezultat important pentru a construi sau a demonstra că o funcție este integrabilă pornind de la o funcție integrabilă cunoscută este următorul:

▣ **TEOREMA 1**

Fie funcțiile $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ și $A \subset [a, b]$ o mulțime finită, astfel încât:

**a)** f este integrabilă pe intervalul $[a, b]$;

**b)** $f(x) = g(x)$, $\forall\, x \in [a, b] \setminus A$.

Atunci g este integrabilă pe $[a, b]$ și $\int_a^b g(x)dx = \int_a^b f(x)dx$.

☞ ***Exemplu***

◆ Fie funcția $g:[0,1]\to\mathbb{R},\ g(x)=\begin{cases}1, & x\in[0,1)\\ 0, & x=1\end{cases}$.

Să analizăm integrabilitatea funcției g pe intervalul $[0,1]$. Pentru aceasta considerăm funcția $f:[0,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=1,\ \forall\ x\in[0,1]$. Funcția f este integrabilă pe $[0,1]$, fiind funcție constantă și $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 1dx=1(1-0)=1$ (vezi exemplul de funcție integrabilă).

Se observă totodată că funcția g se obține din f modificând valoarea acesteia în punctul $x=1$. Prin urmare, aplicând teorema 1, funcția g este integrabilă pe $[0,1]$ și $\int_0^1 g(x)dx=\int_0^1 f(x)dx=1$.

## ➲ OBSERVAȚII

**1.** Există funcții integrabile care nu au primitive.

☞ ***Exemplu***

◆ Fie funcția $g:[0,1]\to\mathbb{R},\ g(x)=\begin{cases}1, & x\in[0,1)\\ 0, & x=1\end{cases}$. Funcția g este funcție integrabilă pe intervalul $[0,1]$ așa cum s-a arătat mai sus, dar nu posedă primitive pe $[0,1]$, deoarece $g([0,1])=\{0,1\}\neq$ interval, (g nu are proprietatea lui Darboux pe $[0,1]$).

**2.** Există funcții neintegrabile care au primitive.

☞ ***Exemplu***

◆ Fie funcția $f:[-1,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}2x\sin\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2}, & x\in[-1,1]\setminus\{0\}\\ 0, & x=0\end{cases}$.

Se constată că funcția f este nemărginită pe $[-1,1]$, deoarece luând șirul $(x_n),\ x_n=\frac{1}{\sqrt{2n\pi+\pi}}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$, atunci șirul $(f(x_n)),\ f(x_n)=\frac{2}{\sqrt{2n\pi+\pi}}\cdot\sin\pi-2\sqrt{2n\pi+\pi}\cdot$ $\cdot\cos\pi=2\sqrt{2n\pi+\pi}$ are limita egală cu $+\infty$.

În consecință, funcția f nu este integrabilă pe intervalul $[-1,1]$.

Totodată, se observă că funcția $F:[-1,1]\to\mathbb{R},\ F(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x^2}, & x\in[-1,1]\setminus\{0\}\\ 0, & x=0\end{cases}$ este funcție derivabilă pe $[-1,1]$ și $F'(x)=f(x),\ \forall\ x\in[-1,1]$.

Așadar, funcția f admite primitive pe intervalul $[-1,1]$, dar nu este integrabilă pe intervalul $[-1,1]$.

# EXERCIȚII ȘI PROBLEME

## EXERSARE

**E1.** Să se calculeze și să se interpreteze grafic sumele Riemann asociate funcțiilor f în următoarele cazuri:

a) $f:[0, 2]\to\mathbb{R},\ f(x)=x$,

$\Delta=\left(0,\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},2\right)$, $\xi=\left(0,1,\frac{5}{4},2\right)$;

b) $f:[-1, 1]\to\mathbb{R},\ f(x)=2x+3$,

$\Delta=\left(-1,-\frac{1}{2},0,\frac{1}{3},1\right)$,

$\xi=\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{2}{3}\right)$;

c) $f:[-1, 2]\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2+1$,

$\Delta=\left(-1,0,\frac{1}{2},\frac{3}{2},2\right)$,

$\xi=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{4},1,2\right)$;

d) $f:[0, 7]\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{x}$,

$\Delta=(0,1,2,3,5,7)$,

$\xi=\left(\frac{1}{4},1,\frac{9}{4},4,\frac{25}{4}\right)$.

**E2.** Fie funcția $f:[0, 1]\to\mathbb{R}$, șirul de diviziuni $(\Delta_n)$ ale intervalului $[0, 1]$

$\Delta_n=\left(0,\ \frac{1}{n},\ \frac{2}{n},\ \ldots,\ \frac{n-1}{n},\ 1\right)$ și sistemele de puncte intermediare $\xi^{(n)}$.

Să se calculeze $S_n=\sigma_{\Delta_n}\left(f,\ \xi^{(n)}\right)$ și $L=\lim\limits_{n\to\infty}S_n$, în cazurile:

a) $f(x)=x,\ \xi^{(n)}=\left(0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},\ldots,\frac{n-1}{n}\right)$;

b) $f(x)=2x+1$,

$\xi^{(n)}=\left(\frac{1}{n},\frac{2}{n},\ldots,\frac{n-1}{n},1\right)$;

c) $f(x)=x^2+x$,

$\xi^{(n)}=\left(0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},\ldots,\frac{n-1}{n}\right)$;

d) $f(x)=x^3,\ \xi^{(n)}=\left(\frac{1}{n},\frac{2}{n},\ldots,\frac{n-1}{n},1\right)$.

**E3.** Se consideră funcția $f:[0, 1]\to\mathbb{R}$,

$f(x)=\begin{cases}3,\ x\in[0, 1)\\ 2,\ x=1\end{cases}$. Să se arate că:

a) f nu are primitive pe [0, 1];

b) f este integrabilă pe [0, 1] și să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

**E4.** Se consideră funcția $f:[0, 1]\to\mathbb{R}$,

$f(x)=\begin{cases}-1,\ \ x\in[0, 1]\cap\mathbb{Q}\\ 1,\ \ \ \ x\in[0, 1]\cap\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$.

Să se arate că:
a) f nu are primitive pe [0, 1];
b) f nu este integrabilă pe [0, 1].

## APROFUNDARE

**A1.** Să se calculeze sumele Riemann $\sigma_{\Delta_n}(f,\ \xi)$ în cazurile:

a) $f:[0, \pi]\to\mathbb{R},\ f(x)=\sin x$,

$\Delta=\left(0,\ \frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{4},\ \pi\right)$,

$\xi=\left(\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{3},\ \frac{2\pi}{3},\ \frac{5\pi}{6}\right)$;

b) $f:\left[\frac{1}{10},\ 1\right]\to\mathbb{R},\ \ f(x)=\log_2 x$,

$\Delta=\left(\frac{1}{10},\ \frac{1}{5},\ \frac{2}{5},\ \frac{3}{5},\ \frac{4}{5},\ 1\right)$,

$\xi=\left(\frac{1}{8},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)$.

**A2.** **Fie** $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \ln\left(x + \frac{1}{n}\right)$, $n \in \mathbb{N}^*$ **și** $\Delta = \left(0, \frac{1}{2}, 1\right)$ **o diviziune a intervalului** $[0, 1]$. **Să se determine** $\alpha > 0$ **astfel încât pentru sistemul de puncte intermediare** $\xi = \left(\frac{1}{2} - \alpha, \frac{1}{2} + \alpha\right)$ **să existe egalitatea** $\sigma_\Delta(f_1, \xi) - \sigma_\Delta(f_2, \xi) = \ln\sqrt{\frac{77}{32}}$.

**A3.** **Să se arate că funcțiile** $f : D \to \mathbb{R}$ **nu sunt integrabile pe D, dacă:**

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2 - 4}, & x \in [0, 2) \\ 3, & x = 2 \end{cases}$;

b) $f(x) = \begin{cases} \ln x, & x \in (0, 1] \\ e, & x = 0 \end{cases}$;

c) $f(x) = \begin{cases} 2^{\frac{1}{9-x^2}}, & x \in (-3, 3) \\ 1, & x \in \{-3, 3\} \end{cases}$.

**A4.** **Se consideră funcția** $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 2x\cos\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x}\sin\frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

**a) Să se arate că funcția f nu este integrabilă pe** $[-1, 1]$.

**b) Este** $F : [-1, 1] \to \mathbb{R}$,

$$F(x) = \begin{cases} x^2\cos\frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

**o primitivă a funcției f?**

**A5.** **Se consideră funcția** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} a^4 + 8, & x \in \mathbb{Q} \\ 10a^2 - 1, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}.$$

**Să se determine** $a \in \mathbb{R}$ **astfel încât funcția f să fie integrabilă pe** $[0, 1]$.

**A6.** **Fie funcția** $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, **integrabilă pe** $[a, b]$, **astfel încât există** $c \in \mathbb{R}$ **cu proprietatea că pentru orice interval** $(\alpha, \beta) \subset [a, b]$, **există** $\xi \in (\alpha, \beta)$ **pentru care** $f(\xi) = c$. **Să se arate că** $\int_a^b f(x)\,dx = c(b - a)$.

**A7.** **Fie funcția** $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ **astfel încât în orice interval** $(\alpha, \beta) \subset [a, b]$, **există punctele** $\xi', \xi'' \in (\alpha, \beta)$ **cu proprietatea** $f(\xi') = 2$ **și** $f(\xi'') = 3$. **Să se arate că f nu este funcție integrabilă pe** $[a, b]$.

# 4 Integrabilitatea funcțiilor continue

Se știe că orice funcție integrabilă pe un interval $[a, b]$ este funcție mărginită. Reciproca acestei afirmații este o propoziție falsă (Exemplu: funcția lui Dirichlet este mărginită dar nu este integrabilă pe nici un interval $[a, b] \subset \mathbb{R}$).

Pornind însă de la funcții mărginite pe un interval de forma $[a, b] \subset \mathbb{R}$ și adăugând condiții suplimentare, se pot obține funcții integrabile pe $[a, b]$.

O astfel de posibilitate o oferă următorul criteriu de integrabilitate.

**▣ TEOREMA 2**
**(Teorema lui Lebesgue)**

Fie $f:[a, b]\to\mathbb{R}$ o funcție mărginită. Dacă funcția f are un număr finit de puncte de discontinuitate, atunci funcția f este funcție integrabilă pe intervalul $[a, b]$.

Acest rezultat este un caz particular al unui criteriu de integrabilitate mai general numit criteriul lui Lebesgue.



*Henri Léon LEBESGUE*
*(1875-1941)*
*matematician francez*

*A obținut rezultate importante în teoria măsurii, a calculului diferențial și integral.*

### *Exercițiu rezolvat*

☒ Fie funcția $f:[-1, 3]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}2x, & x\in[-1, 1]\\ 1-x, & x\in(1, 3)\\ 4, & x=3\end{cases}$.

Să se arate că funcția f este integrabilă pe intervalul $[-1, 3]$.

<u>*Soluție*</u>

Funcția f este discontinuă în punctele $x_1=1,\ x_2=2$ și continuă în rest. Mulțimea valorilor funcției este $\operatorname{Im} f=[-2, 2]\cup\{4\}$. Conform teoremei lui Lebesgue, funcția f este integrabilă pe intervalul $[-1, 3]$.

**▣ TEOREMA 3 (integrabilitatea funcțiilor continue)**

Orice funcție continuă $f:[a, b]\to\mathbb{R}$ este integrabilă pe $[a, b]$.

<u>*Demonstrație*</u>

Funcția f este continuă pe un interval închis și mărginit $[a, b]$.

Conform teoremei lui Weierstrass funcția f este mărginită. Mulțimea punctelor de discontinuitate pentru o funcție continuă este mulțimea vidă, deci este o mulțime finită.

Aplicând teorema lui Lebesgue rezultă că funcția continuă f este integrabilă pe intervalul $[a, b]$. ■

## *Exercițiu rezolvat*

☒ Să se arate că funcția $f:[-1, 3]\to \mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}5x^3-4x+1, & x\in[-1, 1)\\ \log_3(7x+2), & x\in[1, 3]\end{cases}$

este funcție integrabilă pe intervalul $[-1, 3]$.

<u>*Soluție*</u>

Se observă că funcția f este continuă pe $[-1, 1)\cup(1, 3]$, fiind exprimată cu ajutorul unor operații cu funcții continue. Totodată, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=2=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)$, deci $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=2=f(2)$. Așadar funcția f este continuă pe $[-1, 3]$ și conform teoremei 3, rezultă că f este integrabilă pe intervalul $[-1, 3]$.

## EXERCIȚII ȘI PROBLEME

### EXERSARE

**E1. Să se arate că următoarele funcții sunt integrabile pe domeniul de definiție:**

**a)** $f:[-2, 2]\to \mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases}3x+2, & x\in[-2, 1)\\ 4x^2-2x+1, & x\in[1, 2]\end{cases};$$

**b)** $f:[-1, 2]\to \mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases}1-\sqrt{3x+4}, & x\in[0, 2]\\ \dfrac{2x-1}{3x-2}, & x\in[-1, 0)\end{cases};$$

**c)** $f:[1, 3]\to \mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases}\ln(x+1), & x\in[1, e-1]\\ x+2, & x\in(e-1, 3]\end{cases}.$$

**E2. Să se studieze dacă următoarele funcții sunt integrabile pe domeniul de definiție:**

**a)** $f:[-1, 5]\to \mathbb{R},\ f(x)=4x-3$;

**b)** $f:[0, \pi]\to \mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x}{x}, & x\in(0, \pi]\\ 2, & x=0\end{cases};$$

**c)** $f:\left[-\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{3}\right]\to \mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{tgx}{3x}, & x\neq 0\\ \dfrac{1}{3}, & x=0\end{cases}$;

**d)** $f:[-1, 1]\to \mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\arcsin(x-1)}{x-1}, & x\in[-1, 1)\\ 3, & x=1\end{cases};$$

**e)** $f:[-2, 2]\to \mathbb{R},\ f(x)=|x+1|$.

### APROFUNDARE

**A1. Să se studieze integrabilitatea funcțiilor:**

**a)** $f:[-1, 1]\to \mathbb{R}$,

$f(x)=\max\{x, 2-x\}$;

**b)** $f:[-2, 2]\to \mathbb{R}$,

$f(x)=\min\{x^2-2, x\}$;

**c)** $f:[-1, 1]\to \mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}.$$

**A2.** **Să se studieze integrabilitatea funcțiilor:**

a) $f:[-1, 1] \to \mathbb{R}, f(x) = [2x]$;

b) $f:[0, 3] \to \mathbb{R}, f(x) = \{x\}$.

**A3.** **Care dintre următoarele funcții sunt integrabile:**

a) $f:[0, 1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} (1+2x)^{-\frac{1}{x^2}}, & x \in (0, 1] \\ 0, & x = 0 \end{cases};$$

b) $g:[-2, 2] \to \mathbb{R}$,

$$g(x) = \begin{cases} x, & |x| \le 1 \\ 3x^2 + 2|x|, & |x| > 1 \end{cases};$$

c) $h:[-2, 3] \to \mathbb{R}$,

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{2-x} - x}{x^2 - 1}, & |x| < 1 \\ x, & |x| \ge 1 \end{cases};$$

d) $j:\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \to \mathbb{R}$,

$$j(x) = \begin{cases} \dfrac{2^x - 1}{x^2 + x}, & x \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right) \\ \ln(x+2), & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \end{cases}?$$

**A4.** **Să se studieze integrabilitatea funcțiilor f și $f \circ f$:**

a) $f:[-1, 1] \to [-1, 1]$,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ -1, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases};$$

b) $f:[0, 2] \to [0, 2]$,

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{2}, & x \in \mathbb{Q} \\ \sqrt{3}, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}.$$

**A5.** **Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$,**

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn}(x^2 - x), & x \in \mathbb{Q} \\ \operatorname{sgn}(-x^2 - x), & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}.$$

**Să se studieze integrabilitatea funcției f pe intervalele $[-1, 1]$, respectiv $[2, 3]$.**

## DEZVOLTARE

**D1.** **Să se arate că orice funcție monotonă $f:[a, b] \to \mathbb{R}$ este integrabilă pe intervalul $[a, b]$.**

# 5 Formula lui Leibniz-Newton

În cele prezentate până acum au fost întâlnite puține funcții integrabile a căror integrală definită să poată fi calculată folosind definiția integralei.

Problema determinării integralei definite pornind de la definiție este foarte dificilă. De aceea, apare necesitatea găsirii unor metode accesibile de calcul al integralei definite pentru funcții integrabile pe un interval.

**▣ TEOREMA 4 (Formula lui Leibniz-Newton)**

Fie $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ o funcție integrabilă pe $[a, b]$ care admite primitive pe $[a, b]$. Atunci pentru orice primitivă F a funcție f are loc egalitatea:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

*Demonstrație*

Fie $(\Delta_n)$, $\Delta_n = \left(x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, ..., x_{k_n-1}^{(n)}, x_{k_n}^{(n)}\right)$ un șir de diviziuni ale intervalului $[a, b]$, astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} \|\Delta_n\| = 0$.

Aplicând teorema lui Lagrange funcției F pe fiecare interval $\left[x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}\right]$, $i = \overline{1, k_n}$, se găsește $\xi_i^{(n)} \in \left(x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}\right)$ cu proprietatea $F\left(x_i^{(n)}\right) - F\left(x_{i-1}^{(n)}\right) = F'\left(\xi_i^{(n)}\right)\cdot\left(x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}\right) = f\left(\xi_i^{(n)}\right)\cdot\left(x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}\right)$, (1).

Prin urmare, șirul sumelor Riemann asociat funcției f, șirului de diviziuni $(\Delta_n)$ ale intervalului $[a, b]$ și șirului de puncte intermediare $\xi^{(n)}$ are termenul general:

$$\sigma_{\Delta_n}\left(f, \xi^{(n)}\right) = \sum_{i=1}^{k_n} f\left(\xi_i^{(n)}\right)\cdot\left(x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}\right) \overset{(1)}{=} \sum_{i=1}^{k_n}\left[F\left(x_i^{(n)}\right) - F\left(x_{i-1}^{(n)}\right)\right] =$$

$= F(b) - F(a), \forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

Deoarece funcția f este integrabilă pe $[a, b]$, rezultă că $\int_a^b f(x)dx =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \sigma_{\Delta_n}\left(f, \xi^{(n)}\right) = F(b) - F(a)$, ceea ce trebuia demonstrat. ■

*Precizare*

Scrierea $F(b) - F(a)$ din formula lui Leibniz-Newton se înlocuiește frecvent cu relația $F(x)\Big|_a^b$ și se citește „$F(x)$ luat între a și b“.

## Exercițiu rezolvat

☒ Folosind formula lui Leibniz-Newton, să se calculeze următoarele integrale:

**a)** $\int_1^2 \left(3x^2 - 2x + 1\right)dx$; **b)** $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2 - 9}dx$;

**c)** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \frac{x}{2}dx$; **d)** $\int_0^2 \frac{x+1}{\sqrt{-x^2+16}}dx$.

*Soluție*

**a)** Funcția $f : [1, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ este funcție continuă, deci este funcție integrabilă pe intervalul $[1, 2]$. O primitivă a funcției f este funcția $F : [1, 2] \to \mathbb{R}$, $F(x) = x^3 - x^2 + x$.

Rezultă că $\int_1^2 (3x^2 - 2x + 1)dx = F(x)\Big|_1^2 = F(2) - F(1) = 5.$

**b)** Funcția $f:[-1, 1] \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 9}$ este funcție integrabilă pe intervalul $[-1, 1]$ deoarece este funcție continuă.

Mulțimea primitivelor funcției f este $\int \dfrac{1}{x^2 - 9}dx = \dfrac{1}{2 \cdot 3}\ln\left|\dfrac{x-3}{x+3}\right| + \mathscr{C}.$

Alegând primitiva $F(x) = \dfrac{1}{6}\ln\left|\dfrac{x-3}{x+3}\right|$, rezultă că:

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2 - 9}dx = \left(\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right|\right)\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{1}{6}\left(\ln\frac{1}{2} - \ln 2\right) = \frac{1}{6}\ln\frac{1}{4}.$$

**c)** Funcția $f:\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}, f(x) = \sin^2\dfrac{x}{2}$ este integrabilă pe $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ deoarece este funcție continuă.

Folosind formula trigonometrică $\sin^2\dfrac{x}{2} = \dfrac{1 - \cos x}{2}$, rezultă că

$$\int \sin^2\frac{x}{2}dx = \int \frac{1 - \cos x}{2}dx = \frac{1}{2}\left(\int 1\,dx - \int \cos x\,dx\right) = \frac{1}{2}(x - \sin x) + \mathscr{C}.$$

Alegând primitiva $F(x) = \dfrac{1}{2}(x - \sin x)$, atunci:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\frac{x}{2}dx = \frac{1}{2}(x - \sin x)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right).$$

**d)** Funcția $f:[0, 2] \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{16 - x^2}}$ este funcție integrabilă pe $[0, 2]$ deoarece este funcție continuă. Mulțimea primitivelor ei este:

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{16 - x^2}}dx = \int \frac{x}{\sqrt{16 - x^2}}dx + \int \frac{1}{\sqrt{16 - x^2}}dx = -\sqrt{16 - x^2} + \arcsin\frac{x}{4} + \mathscr{C}.$$

Alegând primitiva $F(x) = -\sqrt{16 - x^2} + \arcsin\dfrac{x}{4}$, avem:

$$\int_0^2 \frac{x+1}{\sqrt{16 - x^2}}dx = \left(-\sqrt{16 - x^2} + \arcsin\frac{x}{4}\right)\Bigg|_0^2 = \left(-\sqrt{12} + \arcsin\frac{1}{2}\right) -$$

$$-\left(-\sqrt{16} + \arcsin 0\right) = -2\sqrt{3} + \frac{\pi}{6} + 4.$$

# EXERCIȚII ȘI PROBLEME

## EXERSARE

**E1.** Să se calculeze integralele definite folosind formula lui Leibniz-Newton:

a) $\int_{-1}^{0}\left(3x^2-4x+2\right)dx$;

b) $\int_{-2}^{-1}\left(2x^3+3x^2-6x\right)dx$;

c) $\int_{0}^{\frac{1}{2}}(1-2x)^5\,dx$;

d) $\int_{0}^{1}5\left(x\sqrt{x}-\sqrt[3]{x^2}\right)dx$;

e) $\int_{1}^{64}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)dx$;

f) $\int_{0}^{\sqrt{3}}\frac{1}{x^2+9}\,dx$;

g) $\int_{0}^{2\sqrt{3}}\frac{1}{x^2+36}\,dx$;

h) $\int_{1}^{3}\frac{1}{x^2-16}\,dx$.

**E2.** Să se calculeze următoarele integrale:

a) $\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}\cos x\,dx$;

b) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\sin x\,dx$;

c) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\,dx$;

d) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}\,dx$;

e) $\int_{\pi}^{2\pi}\left(\cos^2 3x+\sin^2 3x\right)dx$;

f) $\int_{\pi}^{2\pi}\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)dx$;

g) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1-\sin^2 x}\,dx$;

h) $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\operatorname{tg}^2 x\,dx$.

**E3.** Să se calculeze următoarele integrale:

a) $\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{3-x^2}}\,dx$;

b) $\int_{2}^{3}\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$;

c) $\int_{0}^{4}\frac{1}{\sqrt{x^2+9}}\,dx$;

d) $\int_{0}^{3}\frac{1}{\sqrt{x^2+16}}\,dx$.

## APROFUNDARE

**A1.** Să se calculeze integralele folosind formula lui Leibniz-Newton:

a) $\int_{0}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{4x^2+1}\,dx$;

b) $\int_{0}^{1}\frac{1}{4x^2-9}\,dx$;

c) $\int_{0}^{\frac{\sqrt{3}}{6}}\frac{1}{\sqrt{1-9x^2}}\,dx$;

d) $\int_{0}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{4x^2+1}}\,dx$.

**A2.** Să se verifice egalitățile:

a) $\int_{0}^{1}\frac{x}{x^2+1}\,dx=\ln\sqrt{2}$;

b) $\int_{0}^{\sqrt[4]{e^2-1}}\frac{x^3}{x^4+1}\,dx=\frac{1}{2}$;

c) $\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{7}}\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}\,dx=1$;

d) $\int_{0}^{\sqrt{5}}\frac{x}{\sqrt{9-x^2}}\,dx=1$;

e) $\int_{0}^{\sqrt{2}}\frac{x}{\sqrt{16-x^4}}\,dx=\frac{\pi}{12}$;

f) $\int_{-\ln 2}^{-\ln\sqrt{2}}\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}\,dx=\frac{\pi}{12}$.

**A3. Să se verifice egalitățile:**

a) $\int_0^{\sqrt{3}} 2x\sqrt{x^2+1}dx = \frac{14}{3}$;

b) $\int_0^3 x\sqrt{9-x^2}dx = 9$;

c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\sqrt{\sin x}dx = \frac{2}{3}$;

d) $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{4-\ln^2 x}}dx = \frac{\pi}{6}$;

e) $\int_1^e \frac{1}{x}\sqrt[3]{\ln x}dx = \frac{3}{4}$.

**A4. Viteza unui punct material variază în funcție de timp după legea $v(t) = 0,01t^3\,(m/s)$. Ce drum parcurge punctul în 10 secunde?**

# 6 Proprietăți ale integralei definite

Având în vedere definiția funcției integrabile pe un interval $[a, b]$ și operațiile cu șiruri convergente, se pot deduce câteva proprietăți ale funcțiilor integrabile și ale integralei definite.

## P1. Proprietatea de liniaritate a integralei

**▣ TEOREMA 5 (liniaritatea integralei)**

Fie $f, g:[a, b]\to\mathbb{R}$ funcții integrabile pe $[a, b]$ și $k\in\mathbb{R}$. Atunci:

**a)** funcția $f+g$ este integrabilă pe $[a, b]$ și

$\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$;

*(Integrala sumei este egală cu suma integralelor.)*

**b)** funcția kf este integrabilă pe $[a, b]$ și $\int_a^b (k\cdot f)(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$. *(Constanta iese în fața integralei.)*

*Demonstrație* (extindere)

**a)** Fie șirul $(\Delta_n)$, $\Delta_n = \left(x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \ldots, x_{k_n-1}^{(n)}, x_{k_n}^{(n)}\right)$ un șir de diviziuni ale intervalului $[a, b]$ cu $\lim_{n\to\infty}\|\Delta_n\| = 0$ și $\xi_i^{(n)}\in\left[x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}\right]$, $i=\overline{1, k_n}$, puncte intermediare.

Avem: $\sigma_{\Delta_n}\left(f+g, \xi^{(n)}\right) = \sum_{i=1}^{k_n}(f+g)\left(\xi_i^{(n)}\right)\left(x_i^{(n)}-x_{i-1}^{(n)}\right) = \sum_{i=1}^{k_n} f\left(\xi_i^{(n)}\right)\left(x_i^{(n)}-x_{i-1}^{(n)}\right) +$

$+\sum_{k=1}^{k_n} g\left(\xi_i^{(n)}\right)\left(x_i^{(n)}-x_{i-1}^{(n)}\right) = \sigma_{\Delta_n}\left(f, \xi^{(n)}\right) + \sigma_{\Delta_n}\left(g, \xi^{(n)}\right)$.

Deoarece funcțiile f și g sunt integrabile pe $[a, b]$ rezultă că $\lim_{n\to\infty} \sigma_{\Delta_n}\left(f, \xi^{(n)}\right) = \int_a^b f(x)dx$ și $\lim_{n\to\infty} \sigma_{\Delta_n}\left(g, \xi^{(n)}\right) = \int_a^b g(x)dx.$

Folosind operațiile cu șiruri convergente se deduce că $\lim_{n\to\infty} \sigma_{\Delta_n}\left(f+g, \xi^{(n)}\right) = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx,$ ceea ce arată că funcția $f+g$ este integrabilă pe $[a, b]$ și are loc egalitatea:

$$\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

**b)** Analog se deduce că funcția kf este integrabilă pe $[a, b]$ și $\int_a^b (kf)(x)dx = k\int_a^b f(x)dx.$ ■

## ➲ OBSERVAȚII

**1.** Afirmațiile teoremei pot fi restructurate astfel:
Dacă $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ sunt funcții integrabile pe $[a, b]$ și $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$, atunci funcția $k_1 f + k_2 g$ este integrabilă pe intervalul $[a, b]$ și $\int_a^b (k_1 f + k_2 g)(x)dx = k_1\int_a^b f(x)dx + k_2\int_a^b g(x)dx.$

**2.** Dacă $n \in \mathbb{N}^*$ și $k_1, k_2, ..., k_n \in \mathbb{R}$, iar $f_i : [a, b] \to \mathbb{R}$ sunt n funcții integrabile pe intervalul $[a, b]$, atunci:

$$\int_a^b \left(\sum_{i=1}^n k_i f_i(x)\right)dx = \sum_{i=1}^n k_i \cdot \int_a^b f_i(x)dx.$$

## *Exerciții rezolvate*

☒ **1.** Să se calculeze $\int_{-1}^2 \left(3x^2 - 4x + 2\right)dx.$

*Soluție*

Avem: $\int_{-1}^2 \left(3x^2 - 4x + 2\right)dx = \int_{-1}^2 3x^2 dx - \int_{-1}^2 4x\,dx + \int_{-1}^2 2\,dx =$

$= 3\int_{-1}^2 x^2 dx - 4\int_{-1}^2 x\,dx + 2\int_{-1}^2 dx = \left.\frac{3x^3}{3}\right|_{-1}^2 - 4\cdot\left.\frac{x^2}{2}\right|_{-1}^2 + 2\cdot x\Big|_{-1}^2 = x^3\Big|_{-1}^2 -$

$-2x^2\Big|_{-1}^2 + 2x\Big|_{-1}^2 = (8+1) - 2(4-1) + 2(2+1) = 9.$

☒ **2.** Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $\int_0^a (6x-5)\,dx = 2.$

<u>*Soluție*</u>

Avem: $\int_0^a (6x-5)\,dx = 6\int_0^a x\,dx - 5\int_0^a dx = 3x^2 \Big|_0^a - 5x\Big|_0^a = 3a^2 - 5a.$

Din condiția $3a^2 - 5a = 2$ se obține $a \in \left\{-\frac{1}{3}, 2\right\}.$

**P2. Proprietatea de aditivitate la interval a integralei**

*Punerea problemei:*

Se consideră funcția $f:[-3, 1] \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 4x+1, & x \in [-3, 0] \\ \dfrac{1}{x^2+1}, & x \in (0, 1] \end{cases}$, funcție continuă pe intervalul $[-3, 1]$.

Se ridică următoarea problemă:

„Cum se calculează integrala $\int_{-3}^{1} f(x)\,dx$?".

• Un procedeu de calcul ar fi să se determine o primitivă a funcției f pe intervalul $[-3, 1]$ și apoi să se aplice formula Leibniz-Newton (temă).

• Alt procedeu de calcul va fi dat de următoarea proprietate a integralei definite a unei funcții integrabile.

▣ **TEOREMA 6 (aditivitatea la interval a integralei)**

Fie $f:[a, b] \to \mathbb{R}$ și $c \in [a, b]$. Dacă funcția f este integrabilă pe intervalele $[a, c]$ și $[c, b]$, atunci f este integrabilă pe intervalul $[a, b]$ și are loc egalitatea $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$

Funcția f considerată mai sus este continuă pe intervalele $[-3, 0]$ și $[0, 1]$, deci este integrabilă pe aceste intervale. Aplicând teorema 6 se obține $\int_{-3}^{1} f(x)\,dx = \int_{-3}^{0} f(x)\,dx + \int_0^1 f(x)\,dx.$

Rezultă că $\int_{-3}^{1} f(x)\,dx = \int_{-3}^{0} (4x+1)\,dx + \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx = \left(2x^2 + x\right)\Big|_{-3}^{0} + \operatorname{arctg} x\Big|_0^1 = -15 + \frac{\pi}{4}.$

▣ **TEOREMA 7 (ereditatea integralei)**

Fie $f:[a, b] \to \mathbb{R}$ o funcție integrabilă pe intervalul $[a, b]$. Dacă $[c, d] \subset [a, b]$, atunci funcția f este și integrabilă și pe intervalul $[c, d]$.

## *Exerciții rezolvate*

☒ **1.** Fie $f:[-1,1]\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}x+1, & x\in[-1,0]\\ x^2-\sqrt{x}, & x\in(0,1]\end{cases}$. Să se arate că funcția f este integrabilă pe $[-1,1]$ și să se calculeze $\int_{-1}^{1}f(x)dx.$

*Soluție*

Restricția funcției f la intervalul $[-1,0]$ este integrabilă fiind o funcție continuă și $\int_{-1}^{0}f(x)dx=\int_{-1}^{0}(x+1)dx=\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Big|_{-1}^{0}=\frac{1}{2}.$

Pentru a demonstra integrabilitatea funcției f pe intervalul $[0,1]$ definim funcția $g:[0,1]\to\mathbb{R},\ g(x)=x^2-\sqrt{x}.$

Deoarece g este funcție continuă pe $[0,1]$, ea este integrabilă pe $[0,1]$ și $\int_{0}^{1}g(x)dx=\int_{0}^{1}\left(x^2-\sqrt{x}\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}-\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right)\Big|_{0}^{1}=\frac{1}{3}-\frac{2}{3}=-\frac{1}{3}.$

Se observă că $f(x)=g(x),\ \forall\ x\in(0,1]$. Aplicând teorema 1 pentru funcțiile f și g, se deduce că funcția f este integrabilă pe intervalul $[0,1]$ și $\int_{0}^{1}f(x)dx=\int_{0}^{1}g(x)dx=-\frac{1}{3}.$ Aplicând proprietatea de aditivitate la interval, rezultă că funcția f este integrabilă pe intervalul $[-1,1]$ și integrala sa este:

$$\int_{-1}^{1}f(x)dx=\int_{-1}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{1}f(x)dx=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}.$$

☒ **2.** Fie funcția $f:[-1,2]\to\mathbb{R}, f(x)=\left|x^2-x\right|$. Să se arate că f este funcție integrabilă pe intervalul $[-1,2]$ și să se calculeze $\int_{-1}^{2}f(x)dx.$

*Soluție*

Funcția f este funcție continuă pe intervalul $[-1,2]$ (operații cu funcții continue) și prin urmare este funcție integrabilă pe intervalul $[-1,2]$.

Legea de corespondență a funcției f se scrie sub forma:

$$f(x)=\begin{cases}x^2-x, & x\in[-1,0]\cup[1,2]\\ x-x^2, & x\in(0,1)\end{cases}.$$

Din proprietatea de ereditate rezultă că funcția f este integrabilă pe intervalele $[-1, 0]$, $[0, 1]$ și $[1, 2]$.

Aplicând proprietatea de aditivitate la interval a integralei se obține:

$$\int_{-1}^{2} f(x)dx = \int_{-1}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{2} f(x)dx = \int_{-1}^{0}\left(x^2 - x\right)dx +$$

$$+\int_{0}^{1}\left(x - x^2\right)dx + \int_{1}^{2}\left(x^2 - x\right)dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-1}^{0} + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{0}^{1} + \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{1}^{2} = \frac{11}{6}.$$

**P3. Proprietatea de monotonie a integralei**

▣ **TEOREMA 8**

Fie $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funcții integrabile pe intervalul $[a, b]$.

**a)** Dacă $f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$, atunci $\int_a^b f(x)dx \geq 0$,

*(pozitivitatea integralei).*

**b)** Dacă $f(x) \leq g(x), \forall x \in [a, b]$, atunci $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$,

*(monotonia integralei).*

*Demonstrație (extindere)*

**a)** Fie șirul $(\Delta_n)$, $\Delta_n = \left(x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, ..., x_{k_n-1}^{(n)}, x_{k_n}^{(n)}\right)$ un șir de diviziuni ale intervalului $[a, b]$, cu $\lim\limits_{n\to\infty}\|\Delta_n\| = 0$, iar $\xi^{(n)} = \left(\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, ..., \xi_{k_n-1}^{(n)}, \xi_{k_n}^{(n)}\right)$, $\xi_i^{(n)} \in \left[x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}\right]$, $i = \overline{1, k_n}$, un sistem de puncte intermediare. Atunci $\sigma_{\Delta_n}\left(f, \xi^{(n)}\right) = \sum\limits_{i=1}^{k_n} f\left(\xi_i^{(n)}\right) \cdot \left(x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}\right) \geq 0, \ \forall n \in \mathbb{N}^*$ (s-a folosit că $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [a, b]$).

Deoarece toți termenii șirului $\left(\sigma_{\Delta_n}\left(f, \xi^{(n)}\right)\right)$ sunt pozitivi, iar șirul este convergent, atunci și limita sa este pozitivă, adică $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

**b)** Definim funcția auxiliară $h : [a, b] \to \mathbb{R}, h = g - f$. Din proprietatea de liniaritate a integralei rezultă că funcția h este integrabilă pe $[a, b]$, iar din proprietatea de pozitivitate rezultă că $\int_a^b h(x)dx \geq 0$.

Așadar, $\int_a^b [g(x) - f(x)]dx \geq 0$, relație din care se obține $\int_a^b f(x)dx \leq$ $\leq \int_a^b g(x)dx$ și proprietatea de monotonie a integralei este demonstrată. ■

## *Problemă rezolvată*

☒ Să se demonstreze inegalitatea $\int_0^e \ln(x+1)dx \geq \int_0^e \frac{x}{x+1}dx$, fără a calcula integralele.

<u>Soluție</u>

Fie $f, g:[0, e] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x+1)$ și $g(x) = \frac{x}{x+1}$.

Vom demonstra că $f(x) \geq g(x)$, $\forall\ x \in [0, e]$.

Definim funcția $h:[0, e] \to \mathbb{R}$, $h(x) = f(x) - g(x)$, funcție derivabilă pe $[0, e]$, cu $h'(x) = \frac{x}{(x+1)^2}$.

Se observă că $h'(x) \geq 0$, $\forall\ x \in [0, e]$, ceea ce arată că funcția h este crescătoare pe intervalul $[0, e]$ și $0 = h(0) \leq h(x) \leq h(e)$, $\forall\ x \in [0, e]$. Așadar, $h(x) \geq 0$, $\forall\ x \in [0, e]$, adică $\ln(x+1) \geq \frac{x}{x+1}$, $\forall\ x \in [0, e]$. Aplicând proprietatea de monotonie a integralei, se obține că $\int_0^e \ln(x+1)dx \geq$ $\geq \int_0^e \frac{x}{x+1}dx$.

▣ **CONSECINȚA 1 (proprietatea de medie a integralei)**

Fie $f:[a, b] \to \mathbb{R}$ o funcție integrabilă pe $[a, b]$ și $m, M \in \mathbb{R}$ astfel încât $m \leq f(x) \leq M$, $\forall\ x \in [a, b]$.

Atunci $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$.

<u>Demonstrație</u>

Într-adevăr, aplicând proprietatea de monotonie a integralei pentru funcția f și funcțiile constante m și M pe intervalul $[a, b]$ se obține:

$\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b M dx$, relații din care rezultă inegalitățile din enunț.

❑ **TEMĂ**

**Să se precizeze ce proprietate se folosește când se afirmă că pentru funcția integrabilă $f:[a, b] \to \mathbb{R}$, există $m, M \in \mathbb{R}$ astfel încât $m \leq f(x) \leq M$, $\forall\ x \in [a, b]$.**

▣ **CONSECINȚA 2**

Fie $f:[a, b] \to \mathbb{R}$ o funcție integrabilă pe intervalul $[a, b]$.

Dacă $m = \inf\{f(x) | x \in [a, b]\}$ și $M = \sup\{f(x) | x \in [a, b]\}$, atunci

$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$.

## *Problemă rezolvată*

☒ Să se demonstreze inegalitatea $1 \le \int_0^1 e^{x^2} dx \le e.$

*Soluție*

Funcția $f:[0, 1] \to \mathbb{R}, f(x) = e^{x^2}$ este integrabilă pe $[0, 1]$ fiind funcție continuă. Să determinăm $m, M \in \mathbb{R},$ valorile extreme ale funcției f pe intervalul $[0, 1].$ Deoarece $f'(x) = 2xe^{x^2} \ge 0, \forall\ x \in [0, 1],$ rezultă că funcția f este crescătoare pe $[0, 1].$ Așadar $m = f(0) = 1$ și $M = f(1) = e.$ Aplicând proprietatea de medie se obține $1(1-0) \le \int_0^1 f(x)dx \le e(1-0)$ și problema este rezolvată.

**▣ CONSECINȚA 3 (modulul integralei)**

Fie $f:[a, b] \to \mathbb{R}$ o funcție continuă. Atunci funcția $|f|$ este funcție integrabilă pe intervalul $[a, b]$ și are loc inegalitatea:

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx.$$

*Demonstrație*

Din ipoteza că f este funcție continuă pe $[a, b],$ rezultă că $|f|$ este funcție continuă pe $[a, b],$ deci integrabilă pe $[a, b].$ Din proprietățile modulului, avem că $-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|, \forall\ x \in [a, b]$ și aplicând monotonia integralei se obține $-\int_a^b |f(x)|dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b |f(x)|dx.$

Așadar, $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx.$ ■

## *Problemă rezolvată*

☒ Fie $f:[a, b] \to \mathbb{R}$ o funcție integrabilă pe intervalul $[a, b].$ Dacă $|f| \le M,$ atunci $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le M(b-a).$

*Soluție*

Din consecința 3 și proprietatea de monotonie a integralei se obține:

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx \le \int_a^b M\,dx = M(b-a).$$

## ➲ OBSERVAȚII

**1.** Consecința 3 este valabilă și pentru funcții integrabile oarecare.

**2.** Reciproca acestei consecințe este falsă.

Dacă funcția $|f|$ este integrabilă pe $[a, b]$ nu rezultă întotdeauna că funcția f este integrabilă pe $[a, b]$.

☞ ***Exemplu***

- Fie $f:[a, b] \to \mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}1, & x \in \mathbb{Q} \\ -1, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\end{cases}$. Funcția f nu este integrabilă pe $[a, b]$.

Avem însă $|f(x)| = 1, \forall x \in [a, b]$ și ca urmare $|f|$ este integrabilă pe intervalul $[a, b]$ fiind funcție continuă.

## EXERCIȚII ȘI PROBLEME

### EXERSARE

**E1. Să se arate că următoarele funcții sunt integrabile și să se calculeze integralele lor:**

**a)** $f:[-1, 2] \to \mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases}2x+3, & x \in [-1, 1] \\ -3x^2+1, & x \in (1, 2]\end{cases};$$

**b)** $f:[0, 3] \to \mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2+4}, & x \in [0, 2) \\ \dfrac{1}{x^2-16}, & x \in [2, 3]\end{cases};$$

**c)** $f:\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}, f(x)=|\sin x|$;

**d)** $f:[-2, 2] \to \mathbb{R}, f(x)=|x^2-1|$.

**E2. Fără a calcula integralele, să se arate că:**

**a)** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{2+\cos x} dx \geq 0$;

**b)** $\int_0^2 (2x-x^2)e^{-x} dx \geq 0$;

**c)** $\int_1^{\frac{3}{2}} \sqrt[3]{x^3-3x}\, dx < 0$;

**d)** $\int_{-1}^3 (x^3-3x^2-9x-5) dx \leq 0$.

**E3. Folosind proprietatea de monotonie a integralei, să se arate că:**

**a)** $\int_{-1}^1 (x^2-3x) dx \leq \int_{-1}^1 (2-2x) dx$;

**b)** $\int_1^2 \frac{x-5}{x+1} dx \geq 2\int_1^2 \frac{x-4}{x+2} dx$;

**c)** $\int_1^3 \sqrt{x+1}\, dx \geq \int_1^3 (x-1) dx$;

**d)** $\int_0^{e-1} \ln(1+x) dx \leq \int_0^{e-1} x\, dx$.

**E4. Fără a calcula integralele, să se arate că:**

**a)** $-15 \leq \int_{-2}^3 (2x+1) dx \leq 35$;

**b)** $0 \leq \int_0^1 (1+2x-3x^2) dx \leq \frac{4}{3}$;

**c)** $-2 \leq \int_{-1}^0 \frac{x+2}{x-1} dx \leq -\frac{1}{2}$;

**d)** $\frac{8}{3} \leq \int_{-1}^1 \frac{x^3-3}{x^3-2} dx \leq 4$;

**e)** $\sqrt{3} \leq \int_4^7 \sqrt{\frac{x-3}{x-1}} dx \leq \sqrt{6}$.

## APROFUNDARE

**A1.** Să se arate că următoarele funcții sunt integrabile și să se calculeze integralele acestora:

a) $f:[-1, 3]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\max(x^2, x+2)$;

b) $f:\left[0, e^2\right]\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases}0, & x=0\\ \min\left(x-e, \ln\frac{e}{x}\right), & x\in\left(0, e^2\right]\end{cases};$$

c) $f:[0, 3]\to\mathbb{R}$, $f(x)=|x-1|+|2x-4|$;

d) $f:[-3, 1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\left|x^2+2x\right|$.

**A2.** Să se arate că următoarele funcții sunt integrabile și să se calculeze integralele acestora:

a) $f:[-1, 2]\to\mathbb{R}$, $f(x)=[x+2]$;

b) $f:[0, 1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\left[x\sqrt{2}\right]$;

c) $f:[1, 4]\to\mathbb{R}$, $f(x)=[x]-2x$;

d) $f:[0, 2]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x-[x]}{2x+1-[x]}$;

e) $f:[0, 3]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x[x]-[x-2]$.

**A3.** Folosind proprietatea de monotonie a integralei, să se arate că:

a) $\int_{-1}^{2}e^{x+1}dx\geq\int_{-1}^{2}e^{x}\,dx$;

b) $\int_{1}^{2}e^{x^2}dx\geq\int_{1}^{2}\left(x^2+1\right)dx$;

c) $\int_{0}^{1}e^{-x^2}dx<\int_{0}^{1}\dfrac{1}{x^2+1}dx$;

d) $\int_{1}^{e}\ln x\,dx\leq\int_{1}^{e}\dfrac{x^2-1}{2}dx$;

e) $\int_{0}^{1}(x+1)\ln(x+1)\,dx\geq\int_{0}^{1}\operatorname{arctg}x\,dx$;

f) $\int_{1}^{3}\ln\dfrac{(x+1)}{x}dx>\int_{1}^{3}\dfrac{2}{2x+1}dx$.

**A4.** Să se arate că:

a) $2\sqrt{e}\leq\int_{0}^{1}e^{x^2}dx+\int_{0}^{1}e^{1-x^2}dx\leq1+e$;

b) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}\leq\int_{2}^{3}\dfrac{\sqrt{x}}{(x-1)^2}dx\leq\sqrt{2}$;

c) $\dfrac{2}{3}\leq\int_{0}^{1}\dfrac{1}{\sqrt{2+x-x^2}}dx\leq\dfrac{1}{\sqrt{2}}$;

d) $\dfrac{\pi}{9}\leq\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\dfrac{\cos x}{1+\cos x}dx\leq\dfrac{\pi}{6}$.

**A5.** Să se demonstreze inegalitățile:

$0\leq\int_{0}^{1}\dfrac{x^{2n}}{1+x}dx\leq\dfrac{1}{2n+1}$ și să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{0}^{1}\dfrac{x^{2n}}{1+x}dx$.

**A6.** Se consideră integralele:

$I_n=\int_{0}^{1}\dfrac{x^n}{4+x^2}dx$ și

$J_n=\int_{0}^{1}\dfrac{x^n}{9-x^2}dx$.

Să se arate că:

a) $I_n\geq J_n$, $\forall\, n\in\mathbb{N}$;

b) $0\leq I_n\leq\dfrac{1}{n+1}$, $\forall\, n\in\mathbb{N}$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty}J_n=0$.

**A7.** Să se compare:

a) $\int_{1}^{4}\ln x\,dx$ și $\int_{1}^{4}\dfrac{x-1}{x}dx$;

b) $\int_{0}^{1}\cos x\,dx$ și $\int_{0}^{1}\left(1-\dfrac{x^2}{2}\right)dx$;

c) $\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}}x\operatorname{arctg}x\,dx$ și

$\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}}\ln\left(1+x^2\right)dx$.

**A8.** Fie șirul $(I_n)$, $I_n=\int_{0}^{1}\ln\left(1+x^n\right)dx$.

a) Să se arate că șirul $(I_n)$ este monoton și mărginit.

b) Să se arate că $I_n\leq\dfrac{1}{n+1}$, $\forall\, n\in\mathbb{N}$, și să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}I_n$.

**A9.** Fie șirul $(I_n)$, $I_n=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx$.

a) Să se calculeze $I_0$, $I_1$ și $I_2$.

b) Să se arate că șirul $(I_n)$ este monoton și mărginit.

**A10.** Se consideră funcțiile continue $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$. Să se arate că

$$\left(\int_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx\right)^2 \le$$

$$\le \int_a^b f^2(x)\,dx \cdot \int_a^b g^2(x)\,dx.$$

*(inegalitatea lui Cauchy-Buniakovski-Schwarz).*

**A11.** Fie $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ funcție integrabilă pe $[0, 1]$ și $I_n = \int_0^1 x^n f(x)\,dx$. Dacă $a_n = \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1}$, $n \in \mathbb{N}^*$, să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} a_n I_n$.

*(Admitere ASE București, 2003)*

## DEZVOLTARE

**D1.** Fie $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, funcții continue. Să se arate că:

a) funcțiile $\min(f, g)$ și $\max(f, g)$ sunt integrabile pe $[a, b]$;

b) $\int_a^b \min(f(x), g(x))\,dx \le$

$$\le \min\left(\int_a^b f(x)\,dx, \int_a^b g(x)\,dx\right);$$

c) $\int_a^b \max(f(x), g(x))\,dx \ge$

$$\ge \max\left(\int_a^b f(x)\,dx, \int_a^b g(x)\,dx\right).$$

**D2.** Dacă funcțiile $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ sunt continue, să se arate că:

$$\sqrt{\int_a^b [f(x)+g(x)]^2\,dx} \le$$

$$\le \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx} + \sqrt{\int_a^b g^2(x)\,dx}.$$

*(Inegalitatea lui Minkowski)*

**D3.** Fie $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, funcții monotone.

a) Dacă f și g au aceeași monotonie, atunci $\int_a^b f(x)g(x)\,dx \ge$

$$\ge \frac{1}{b-a}\left(\int_a^b f(x)\,dx\right)\left(\int_a^b g(x)\,dx\right).$$

b) Dacă f și g au monotonii diferite, atunci $\int_a^b f(x)g(x)\,dx \le$

$$\le \frac{1}{b-a}\left(\int_a^b f(x)\,dx\right)\left(\int_a^b g(x)\,dx\right).$$

*(Inegalitățile lui Cebâșev)*

## TESTE DE EVALUARE

### Testul 1

❍1. Fie funcția $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 2x$ și $\Delta_n = \left(0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1\right)$ o diviziune a intervalului $[0, 1]$.

a) Să se calculeze sumele Riemann $S_n = \sigma_{\Delta_n}(f, \xi)$ și $S'_n = \sigma_{\Delta_n}(f, \xi')$, dacă $\xi = \left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n}{n}\right)$ și $\xi' = \left(\frac{1}{2n}, \frac{3}{2n}, \ldots, \frac{2k-1}{2n}, \ldots, \frac{2n-1}{2n}\right)$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ și $\lim\limits_{n\to\infty} S_n'$.

*(4 puncte)*

❍2. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} a, & x < 1 \\ e^{1-x}, & x \geq 1 \end{cases},\ a \in \mathbb{R}$.

a) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ pentru care funcția admite primitive pe $\mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $\int_{-1}^{2} \left[xf''(x) + f'(x)\right] dx$ pentru „a“ determinat anterior.

*(3 puncte)*

❍3. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \left| x^2 + \left| x^2 - x \right| - 1 \right|$. Dacă $I = \int_0^2 f(x)\,dx$, atunci:

a) $I = \frac{49}{6}$; b) $I = \frac{5}{6}$; c) $I = \frac{8}{3}$; d) $I = \frac{2}{3}$. *(2 puncte)*

*(Admitere ASE București, 1999, Facultatea de Comerț)*

❍4. Căldura specifică a unui corp la temperatura t este egală cu $c(t) = 0,2 + 0,001t$. Ce căldură este necesară pentru a încălzi un gram din acest corp de la $0^\circ C$ la $100^\circ C$?

## Testul 2

❍1. Să se determine funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = ax^2 + bx + c,\ a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$, care satisface condițiile $f'(1) = 8$, $f(2) + f''(2) = 33$ și $\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{7}{3}$.

*(3 puncte)*

❍2. Să se determine $a \in (1, +\infty)$ astfel încât $\frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \int_1^a \left( \frac{3}{2}\sqrt{x} + 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx = 4$.

*(2 puncte)*

❍3. Se dă funcția $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \beta, & x = 0 \\ x^2 \cdot \left[ \frac{1}{x^2} \right], & x > 0 \end{cases}$. Dacă $I = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} f(x)\,dx$, atunci:

a) $I = 1$; b) $I = \frac{1}{3}\left( \frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) - \frac{1}{8}$; c) $I = \frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{8}$; d) $I = \frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{8}$. *(3 puncte)*

*(Admitere ASE, București, 1998, SELS)*

❍4. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 1 - x, & x \in \mathbb{Q} \\ \frac{1}{x}, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$.

a) Să se arate că f nu este integrabilă pe nici un interval $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

b) Să se arate că $f \circ f$ are primitive și este integrabilă pentru oricare $[a, b] \subset \mathbb{R}$. *(1 punct)*

*(Olimpiadă, faza locală)*

# 7 Integrarea funcțiilor continue

Anterior s-a stabilit că orice funcție continuă pe un interval este integrabilă pe acel interval.

În continuare vor fi prezentate câteva rezultate proprii clasei de funcții continue.

**▣ TEOREMA 9 (teorema de medie)**

Dacă $f:[a, b]\to\mathbb{R}$ este funcție continuă, atunci există $\xi\in[a, b]$ astfel încât $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = f(\xi)$.

*Demonstrație*

Funcția f, fiind funcție continuă pe intervalul $[a, b]$, este funcție mărginită și își atinge marginile (teorema lui Weierstrass).

Fie $m=\inf\{f(x)|x\in[a, b]\}$ și $M=\sup\{f(x)|x\in[a, b]\}$, marginile funcției f pe intervalul $[a, b]$, iar $u, v\in[a, b]$, astfel încât $m=f(u)$ și $M=f(v)$. Deoarece $m\le f(x)\le M$ pentru oricare $x\in[a, b]$, aplicând proprietatea de medie a integralei, se obțin relațiile $m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le$ $\le M(b-a)$, care se mai scriu sub forma: $f(u)=m\le\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\le$ $\le M=f(v)$.

Funcția f este continuă pe intervalul $[a, b]$, deci are proprietatea lui Darboux pe $[a, b]$. Rezultă că există $\xi\in[a, b]$ astfel încât $f(\xi)=\frac{1}{b-a}\cdot\int_a^b f(x)dx$ și demonstrația teoremei este încheiată. ■

➢ **COMENTARII**

**1.** Numărul $f(\xi)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ se numește **valoarea integrală medie** a funcției f pe intervalul $[a, b]$.

**2. Interpretarea geometrică a teoremei de medie**

Pentru o funcție f pozitivă pe intervalul $[a, b]$, în condițiile teoremei de medie, există $\xi\in[a, b]$ astfel încât aria subgraficului $\Gamma_f$ să fie egală cu aria suprafeței dreptunghiulare cu dimensiunile $(b-a)$ și $f(\xi)$, figura 1.

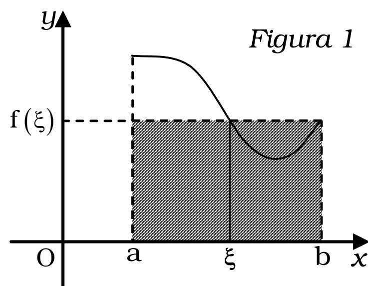


*Figura 1*

## Problemă rezolvată

☒ Să se determine valoarea integrală medie și punctul $\xi$ în care se obține valoarea integrală medie pentru funcțiile:

**a)** $f:\left[1, \sqrt{2}\right] \to \mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$; **b)** $f:\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R},\ f(x)=\cos x.$

*Soluție*

**a)** Se aplică teorema de medie funcției continue f pe intervalul $\left[1, \sqrt{2}\right]$. Așadar, există $\xi \in \left[1, \sqrt{2}\right]$ astfel încât:

$$f(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2}-1}\int_1^{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx=\frac{1}{\sqrt{2}-1}\arcsin\frac{x}{2}\bigg|_1^{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}-1}\cdot\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{12}\left(\sqrt{2}+1\right).$$

Numărul $\xi$ se poate calcula din ecuația $f(\xi)=\frac{\pi}{12}\left(\sqrt{2}+1\right)$ și se obține $\xi=\frac{2}{\pi}\sqrt{\pi^2-36\left(3-2\sqrt{2}\right)}\in\left[1, \sqrt{2}\right]$.

**b)** Aplicând teorema de medie rezultă că există $\xi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ astfel încât $f(\xi)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=\frac{2}{\pi}$. Din ecuația $f(\xi)=\frac{2}{\pi}$, respectiv $\cos\xi=\frac{2}{\pi}$, se obține $\xi=\arccos\frac{2}{\pi}\in\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

▣ **TEOREMA 10 (de existență a primitivelor unei funcții continue)**

Fie $f:[a, b]\to\mathbb{R}$, o funcție continuă. Atunci funcția $F:[a, b]\to\mathbb{R}$, $F(x)=\int_a^x f(t)dt,\ \forall\ x\in[a, b]$ este o primitivă a funcției f, care se anulează în $x=a$.

*Demonstrație*

Pentru a demonstra că F este primitivă a funcției f pe intervalul $[a, b]$ se vor verifica următoarele proprietăți:

**a)** F este funcție derivabilă pe $[a, b]$;

**b)** $F'(x)=f(x),\ \forall\ x\in[a, b]$.

Funcția F este derivabilă într-un punct $x_0\in[a, b]$ dacă există limita $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}=F'(x_0)\in\mathbb{R}$.

Pentru a arăta acest lucru, fie $x, x_0 \in [a, b]$, $x \neq x_0$, $x_0$ fixat, dar oarecare.

Avem: $F(x)-F(x_0)=\int_a^x f(t)dt-\int_a^{x_0} f(t)dt=\int_{x_0}^a f(t)dt+\int_a^x f(t)dt=$ $=\int_{x_0}^x f(t)dt$ (proprietatea de aditivitate la interval), (1).

Aplicând teorema de medie funcției f pe $[x_0, x]$ sau $[x, x_0]$, rezultă că există $\xi_x$ între x și $x_0$ astfel încât $\int_{x_0}^x f(t)dt=f(\xi_x)(x-x_0)$, (2).

Din relațiile (1) și (2) se obține $\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}=f(\xi_x)$.

Rezultă că $F'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0} f(\xi_x)=f(x_0)$ ($\xi_x$ este între x și $x_0$, iar funcția f este continuă) și astfel, F este derivabilă în punctul $x_0 \in [a, b]$. Așadar, funcția F este derivabilă pe intervalul $[a, b]$ și $F'=f$, deci F este o primitivă a funcției f pe intervalul $[a, b]$.

Avem totodată, $F(a)=\int_a^a f(t)dt=0$. ■

## *Exerciții rezolvate*

☒ **1.** Fie $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, F(x)=\int_0^x \frac{e^{t^2}}{t^2+1}dt$. Să se calculeze $F'(0), F'(1), F'(-2)$.

<u>*Soluție*</u>

Funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(t)=\frac{e^{t^2}}{t^2+1}$ este continuă pe $\mathbb{R}$, deci are primitive pe $\mathbb{R}$. Fie $G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o primitivă a funcției f. Aplicând formula lui Leibniz-Newton se obține: $F(x)=G(x)-G(0)$.

Rezultă că $F'(x)=G'(x)=f(x)=\frac{e^{x^2}}{x^2+1}, \forall x\in\mathbb{R}$.

Se găsește $F'(0)=1, F'(1)=\frac{e}{2}$, $F'(-2)=\frac{e^4}{5}$.

> f continuă
> $\left(\int_a^x f(t)dt\right)'=f(x)$

☒ **2.** Fie funcția $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, F(x)=\int_1^{x^2+1}\frac{e^t}{t^6+1}dt$.

**a)** Să se calculeze $F'(x), x\in\mathbb{R}$.

**b)** Să se studieze monotonia funcției F.

*Soluție*

**a)** Funcția $g:\left[1, x^2+1\right]\to\mathbb{R},\ g(t)=\dfrac{e^t}{t^6+1}$, este continuă pe intervalul $\left[1, x^2+1\right]$, deci admite primitive pe acest interval. Fie G o primitivă a funcției g pe intervalul $\left[1, x^2+1\right]$. Rezultă că $F(x)=G\left(x^2+1\right)-G(1)$ și $F'(x)=2x\cdot G'\left(x^2+1\right)=2x\cdot g\left(x^2+1\right)=2x\cdot\dfrac{e^{x^2+1}}{\left(x^2+1\right)^6+1}$.

**b)** Studiind semnul funcției derivate $F'$ a funcției F, rezultă că F este descrescătoare pe intervalul $(-\infty, 0]$ și este crescătoare pe intervalul $[0, +\infty)$.

## EXERCIȚII ȘI PROBLEME

### EXERSARE

**E1. Să se determine valoarea integrală medie pentru funcțiile:**

**a)** $f:\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right]\to\mathbb{R},\ f(x)=\sin x$;

**b)** $f:\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R},\ f(x)=3\sin x+\cos x$;

**c)** $f:[3, 4]\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{1}{x^2-4}$;

**d)** $f:[-2, 0]\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{1}{x^2+4x+6}$.

**E2. Să se determine punctul $\xi$ în care se realizează valoarea integrală medie pentru funcțiile:**

**a)** $f:[1, 4]\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{x}$;

**b)** $f:[0, 1]\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2+2$.

**E3. Se consideră funcția $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,**

$$F(x)=\int_0^x e^{t^2}\left(t^2-4\right)dt.$$

**a) Să se calculeze $F'(x)$, $F'(-2)$, $F'(2)$.**

**b) Să se studieze monotonia funcției F.**

**E4. Fără a calcula integralele, să se verifice egalitățile:**

**a)** $\left(\int_0^{\sin x}\arcsin t\,dt\right)'=x\cos x$;

**b)** $\left(\int_0^{\cos x}\sqrt{1-t^2}\,dt\right)'=-\sin x\cdot|\sin x|$;

**c)** $\left(\int_0^{x^2+4x}\sqrt{4+t}\,dt\right)'=2(x+2)^2\operatorname{sgn}(x+2)$;

**d)** $\left(\int_{\frac{\pi}{6}}^{\arccos x}\ln\left(2+3\cos^2 t\right)dt\right)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ln\dfrac{1}{3x^2+2}$.

## APROFUNDARE

**A1.** Fie funcția $f:[a, b] \to \mathbb{R}$, continuă și strict monotonă. Să se arate că există un singur punct $\xi \in [a, b]$, astfel încât $\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(\xi)$.

**A2.** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 \int_n^{n+1} \frac{x^3+1}{x^5+2}\,dx$.

**A3.** Dacă $I_n = \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \operatorname{arctg}(nx)\,dx$, $n \in \mathbb{N}^*$ și $L = \lim\limits_{n\to\infty} n(n+1)I_n$, atunci:

a) $L = 0$; b) $L = \frac{\pi}{4}$;

c) $L = 1$; d) $L = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

*(Admitere ASE, București, 2002)*

**A4.** Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\sin^2 x} \cdot \int_0^x \ln\left(1+t^2\right)dt$;

b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^3+x^4} \cdot \int_x^{2x} \sin^3 t\,dt$;

c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\int_0^{x^2} \ln\left(1+t+t^2\right)dt}{\int_0^x \ln\left(1+t^3\right)dt}$.

**A5.** Să se determine funcțiile continue $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel încât:

a) $\int_0^x f(t)\,dt = x^2$, $x \in \mathbb{R}$;

b) $\int_0^x f(t)\,dt = \int_x^{2x} f(t)\,dt$, $x \in \mathbb{R}$;

c) $2\int_0^x e^t f(t)\,dt = \int_0^{2x} f(t)\,dt$, $x \in \mathbb{R}$.

**A6.** Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = \operatorname{sgn}(x)$. Să se studieze derivabilitatea funcției $g(x) = \int_{1-x}^{1+x} f(t)\,dt$, $x \in \mathbb{R}$.

**A7.** Să se determine funcțiile continue $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ care îndeplinesc simultan condițiile:

$\int_a^b f(x)\,dx = g(b) - g(a)$ și

$\int_a^b x f(x)\,dx = bg(b) - ag(a)$,

$\forall\ a, b \in \mathbb{R}$.

## DEZVOLTARE

**D1.** Fie $f, g:[a, b] \to \mathbb{R}$, funcții integrabile. Dacă $g(x) \geq 0$, $\forall\ x \in [a, b]$ și $m = \inf f$ și $M = \sup f$, să se arate că există $c \in [m, M]$ astfel încât: $\int_a^b f(t)g(t)\,dt = c \cdot \int_a^b g(t)\,dt$.

**D2.** Fie $f, g:[a, b] \to \mathbb{R}$. Să se arate că dacă f este funcție integrabilă și g este funcție monotonă, există $c \in [a, b]$ cu proprietatea că:

$\int_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx = g(a)\int_a^c f(x)\,dx + g(b)\int_c^b f(x)\,dx$.

# 8 Metode de calcul pentru integrale definite

## 8.1. Metoda integrării prin părți

▣ **TEOREMA 11**

Fie $f, g:[a, b]\to \mathbb{R}$ funcții derivabile cu derivatele $f'$ și $g'$ continue. Atunci $\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$, (formula integrării prin părți).

*Demonstrație*

Funcția $f\cdot g$ este funcție derivabilă pe intervalul $[a, b]$, fiind un produs de funcții derivabile și $(fg)' = f'g + fg'$. Rezultă că funcția fg este o primitivă a funcției $f'g + fg'$.

Aplicând formula lui Leibniz-Newton, se obține:

$\int_a^b \left[f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\right]dx = f(x)g(x)\Big|_a^b$, (1).

Din proprietatea de liniaritate a integralei și relația (1) rezultă că:

$\int_a^b f'(x)g(x)dx + \int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)\cdot g(x)\Big|_a^b$, egalitate din care se obține relația din enunț:

$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$. ■

### *Exerciții rezolvate*

☒ **1.** Să se calculeze următoarele integrale, utilizând metoda integrării prin părți:

**a)** $\int_1^2 xe^x dx$; **b)** $\int_1^e \ln x\, dx$; **c)** $\int_0^\pi x\cos x\, dx$;

**d)** $\int_0^1 \sqrt{1+x^2}dx$; **e)** $\int_{\sqrt{5}}^{\sqrt{8}} x\sqrt{x^2-4}\, dx$; **f)** $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos^4 x}dx$.

*Soluție*

**a)** Alegând $f(x) = x,\ g'(x) = e^x$ se obține $f'(x) = 1,\ g(x) = e^x$.

Conform formulei integrării prin părți rezultă:

$$\int_1^2 xe^x dx = xe^x\Big|_1^2 - \int_1^2 e^x dx = xe^x\Big|_1^2 - e^x\Big|_1^2 = \left(2e^2 - e\right) - \left(e^2 - e\right) = e^2.$$

**b)** Se alege $f(x)=\ln x$ și $g'(x)=1$. Se obține $f'(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=x$.

Aplicând metoda integrării prin părți avem:

$$\int_1^e \ln x\,dx = x\ln x\Big|_1^e - \int_1^e 1\,dx = (e-0) - x\Big|_1^e = e-(e-1)=1.$$

**c)** Fie $f(x)=x$ și $g'(x)=\cos x$. Avem $f'(x)=1$ și $g(x)=\sin x$. Cu această alegere, aplicând metoda integrării prin părți, se obține:

$$\int_0^\pi x\cos x\,dx = x\sin x\Big|_0^\pi - \int_0^\pi \sin x\,dx = 0+\cos x\Big|_0^\pi = -1-1=-2.$$

➢ **COMENTARIU**

Dacă s-ar face alegerea $f(x)=\cos x$, $g'(x)=x$, atunci metoda integrării prin părți ar conduce la egalitatea $\int_0^\pi x\cos x\,dx = \frac{x^2}{2}\cos x\Big|_0^\pi + \frac{1}{2}\int_0^\pi x^2\sin x\,dx$. Se observă că integrala rezultată în membrul al doilea este mai complicată decât integrala inițială. În astfel de situații se face o nouă alegere pentru funcțiile f și $g'$.

**d)** Alegem $f(x)=\sqrt{1+x^2}$ și $g'(x)=1$. Rezultă că $f'(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ și $g(x)=x$.

Aplicând integrarea prin părți se obține:

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx = \int_0^1 (x)'\sqrt{1+x^2}\,dx = x\sqrt{1+x^2}\Big|_0^1 - \int_0^1 x\cdot\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx =$$

$$=\sqrt{2}-\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \sqrt{2}-\int_0^1 \frac{(1+x^2)-1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \sqrt{2}-\int_0^1\sqrt{1+x^2}\,dx +$$

$$+\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \sqrt{2}-\int_0^1\sqrt{1+x^2}\,dx + \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\Big|_0^1 =$$

$$=\sqrt{2}-\int_0^1\sqrt{1+x^2}\,dx+\ln\left(1+\sqrt{2}\right).$$

Așadar, $\int_0^1\sqrt{1+x^2}\,dx = \sqrt{2}-\int_0^1\sqrt{1+x^2}\,dx+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$, relație din care se obține $2\int_0^1\sqrt{1+x^2}\,dx=\sqrt{2}+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$ și $\int_0^1\sqrt{1+x^2}\,dx=\frac{1}{2}\left[\sqrt{2}+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right]$.

➢ **COMENTARIU**

Calculul acestei integrale putea fi pornit amplificând radicalul cu el însuși, obținându-se: $\int_0^1\sqrt{1+x^2}\,dx = \int_0^1\frac{1+x^2}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx +$

$$+\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx + \int_0^1 x\cdot\left(\sqrt{1+x^2}\right)'dx.$$

Din acest moment, prima integrală se calculează folosind formula lui Leibniz-Newton pentru primitiva $F(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ iar cealaltă integrală se calculează prin metoda integrării prin părți, alegând $f(x)=x$, $g'(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ și ca urmare, $f'(x)=1$ și $g(x)=\sqrt{1+x^2}$.

Se obține: $\int_0^1 x\left(\sqrt{1+x^2}\right)'dx = x\sqrt{1+x^2}\,\Big|_0^1 - \int_0^1\sqrt{1+x^2}dx = \sqrt{2}-\int_0^1\sqrt{1+x^2}\,dx.$

Așadar, $\int_0^1\sqrt{1+x^2}dx = \ln\left(1+\sqrt{2}\right)+\sqrt{2}-\int_0^1\sqrt{1+x^2}dx$, deci $\int_0^1\sqrt{1+x^2}dx =$ $=\frac{1}{2}\left[\sqrt{2}+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right].$

**❑ TEMĂ DE PROIECT**

**Să se verifice egalitățile (în condițiile de existență):**

**1.** $\int_a^b \sqrt{x^2+c^2}dx = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2+c^2} + c^2\ln\left(x+\sqrt{x^2+c^2}\right)\right]\Big|_a^b;$

**2.** $\int_a^b \sqrt{x^2-c^2}dx = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2-c^2} - c^2\ln\left(x+\sqrt{x^2-c^2}\right)\right]\Big|_a^b;$

**3.** $\int_a^b \sqrt{c^2-x^2}dx = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{c^2-x^2} + c^2\arcsin\frac{x}{c}\right]\Big|_a^b.$

**e)** Să amplificăm funcția de integrat cu $\sqrt{x^2-4}$.

Avem $\int_{\sqrt{5}}^{\sqrt{8}} x\sqrt{x^2-4}dx = \int_{\sqrt{5}}^{\sqrt{8}}\frac{x^3-4x}{\sqrt{x^2-4}}dx = \int_{\sqrt{5}}^{\sqrt{8}}\frac{x^3}{\sqrt{x^2-4}}dx - 4\int_{\sqrt{5}}^{\sqrt{8}}\frac{x}{\sqrt{x^2-4}}dx =$ $= I_1 - 4\sqrt{x^2-4}\,\Big|_{\sqrt{5}}^{\sqrt{8}} = I_1 - 4,\ (1).$

Pentru calculul integralei $I_1$ se folosește metoda integrării prin părți, alegând $f(x)=x^2$ și $g'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-4}}=\left(\sqrt{x^2-4}\right)'$.

Se obține: $I_1 = \int_{\sqrt{5}}^{\sqrt{8}} x^2\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2-4}}dx = \int_{\sqrt{5}}^{\sqrt{8}} x^2\left(\sqrt{x^2-4}\right)'dx = x^2\sqrt{x^2-4}\,\Big|_{\sqrt{5}}^{\sqrt{8}} -$ $-2\int_{\sqrt{5}}^{\sqrt{8}} x\sqrt{x^2-4}\,dx = 11 - 2\int_{\sqrt{5}}^{\sqrt{8}} x\sqrt{x^2-4}\,dx.$

Se observă că $I_1$ conține integrala de la care s-a pornit.

Înlocuind pe $I_1$ în relația (1) se obține în final $\int_{\sqrt{5}}^{\sqrt{8}} x\sqrt{x^2-4}\,dx = \frac{7}{3}$.

**f)** Pentru început, se scrie $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$ și apoi se distribuie numitorul comun la fiecare termen al numărătorului. Se obține succesiv:

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos^4 x}dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^4 x}dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos^2 x}dx =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} tg^2 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}dx + tg\,x \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} tg^2 x \cdot (tg\,x)'\,dx + \left(\sqrt{3}-1\right) = \left(\sqrt{3}-1\right) + I_1. \quad (2)$$

Pentru calculul integralei $I_1$ se aplică metoda integrării prin părți și se obține:

$$I_1 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} tg^2 x \cdot (tg\,x)'\,dx = tg^3 x \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} - 2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} tg^2 x \cdot (tg\,x)' dx = 3\sqrt{3} - 1 - 2I_1.$$

Rezultă că $I_1 = \frac{3\sqrt{3}-1}{3}$, (3).

Din relațiile (2) și (3) se obține în final că $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos^4 x}dx = \frac{6\sqrt{3}-4}{3}$.

☒ **2.** Să se găsească o formulă de recurență pentru șirul de integrale $(I_n)$, $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$, $n \in \mathbb{N}$. (Bacalaureat 2002, Sesiunea specială)

*Soluție*

Pentru $n = 0 \Rightarrow I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$.

Pentru $n = 1 \Rightarrow I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = -\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$.

Pentru $n \geq 2$ vom aplica metoda integrării prin părți alegând $f(x) = \sin^{n-1} x$ și $g'(x) = \sin x$. Rezultă că $f'(x) = (n-1)\sin^{n-2} x \cdot \cos x$, $g(x) = -\cos x$, iar integrala $I_n$ devine:

$$I_n = -\sin^{n-1} x \cdot \cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1)\cdot \sin^{n-2} x \cdot \cos^2 x\,dx =$$

$$= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cdot \cos^2 x\,dx = (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cdot \left(1-\sin^2 x\right)dx =$$

$$= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\,dx - (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n.$$

Așadar, $I_n = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$, relație din care se obține următoarea formulă de recurență: $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ și $I_0 = \frac{\pi}{2}$, $I_1 = 1$.

## EXERCIȚII ȘI PROBLEME

### EXERSARE

**E1. Să se calculeze folosind integrarea prin părți:**

a) $\int_0^1 xe^{2x}dx$; b) $\int_0^1 (2x-1)e^x dx$;

c) $\int_1^e x\ln x\,dx$; d) $\int_1^e x^2 \ln x\,dx$;

e) $\int_1^{e^2} \ln^2 x\,dx$; f) $\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx$.

**E2. Să se calculeze folosind integrarea prin părți:**

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+1)\sin x\,dx$;

b) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} x\sin x\,dx$;

c) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 x\,dx$;

d) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\sin^2 x}dx$.

**E3. Să se calculeze folosind integrarea prin părți:**

a) $\int_1^{\sqrt{5}} \sqrt{x^2+4}\,dx$;

b) $\int_0^3 \sqrt{16-x^2}\,dx$;

c) $\int_3^4 \sqrt{x^2-5}\,dx$;

d) $\int_0^1 x\sqrt{x^2+1}\,dx$.

**E4. Să se verifice egalitățile:**

a) $\int_0^1 xe^{x-2}dx = \frac{1}{e^2}$;

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x\,dx = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{\pi}{2}}+1\right)$;

c) $\int_0^1 (x+\arcsin x)\,dx = \frac{\pi-1}{2}$;

d) $\int_1^e x^2 \ln x\,dx = \frac{2e^3+1}{9}$.

### APROFUNDARE

**A1. Să se calculeze integralele:**

a) $\int_{-1}^1 x^3 e^{x+1}dx$;

b) $\int_1^{e^2} x\ln^2 x\,dx$;

c) $\int_0^1 \left[x+\ln\left(1+x^2\right)\right]dx$;

d) $\int_0^1 \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)dx$;

e) $\int_1^e \sin(\ln x)\,dx$;

f) $\int_1^{\sqrt{e}} x\log_3 x\,dx$;

g) $\int_0^1 \left(x+x^3\right)e^{x^2}dx$;

h) $\int_1^e x^n \ln x\,dx$, $n \in \mathbb{N}$;

i) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{\sqrt{1+x^2}}dx$.

**A2. Să se calculeze integralele:**

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\,dx$;

b) $\int_0^{\pi} x \sin^2 \frac{x}{2}\,dx$;

c) $\int_0^{\frac{1}{2}} x \arcsin x\,dx$;

d) $\int_0^{1} \operatorname{arctg} x\,dx$;

e) $\int_{-\pi}^{\pi} x \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}\,dx$;

f) $\int_0^{1} e^{\arcsin x}dx$;

g) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{1+\cos 2x}\,dx$;

h) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x \cos x}{\sin^3 x}\,dx$.

**A3. Să se calculeze integralele:**

a) $\int_0^{1} \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$;

b) $\int_0^{1} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx$;

c) $\int_{\sqrt{2}}^{2} x \operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1}dx$;

d) $\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{x}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}} \arcsin x\,dx$;

e) $\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)dx$;

f) $\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{x \arccos x}{\left(1-x^2\right)\sqrt{1-x^2}}\,dx$;

g) $\int_0^{\frac{1}{2}} (\arcsin x)^2 dx$.

**A4. Să se calculeze:**

a) $\int_0^{2\pi} x|\sin x|\,dx$;

b) $\int_{-1}^{3} \left|x^2 - x\right| e^x dx$;

c) $\int_{\frac{1}{e}}^{e^2} \left(|\ln x| + \frac{1}{x}[\ln x]\right)dx$.

**A5. Să se determine $a > 0$ astfel încât:**

a) $\int_a^{a+1} (3x-2)\,e^{x-a}dx = 3$;

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(x^2 - ax\right) \cdot \sin x\,dx = \pi + 8 - 3a^2$.

**A6. Să se calculeze integralele:**

a) $\int_0^{1} x^2\sqrt{x^2+4}\,dx$;

b) $\int_0^{1} x^3\sqrt{x^2+1}\,dx$.

**A7. Să se calculeze următoarele integrale:**

a) $\int_1^{2} \ln x \cdot g(x)\,dx$, unde $g:[1, 2] \to \mathbb{R}$, $g(x) = \max\left(x+1,\ x^2-1\right)$;

b) $\int_{-1}^{2} e^x f(x)\,dx$, unde $f:[-1, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \min\left(x,\ x^2\right)$.

**A8. Fie** $I_n = \int_0^1 x^n e^x dx$, $n \in \mathbb{N}$. **Să se arate că:**

a) $I_n + nI_{n-1} = e$, $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$.

**A9. Se consideră șirul $(I_n)$,**

$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Să se calculeze $I_0$, $I_1$, $I_2$.

b) Să se studieze monotonia șirului $(I_n)$.

c) Să se găsească o formulă de recurență pentru $I_n$ folosind metoda integrării prin părți.

**A10. Fie șirul $(I_n)$, $I_n = \int_0^1 \left(1-x^2\right)^n dx, n \in \mathbb{N}$.**

a) Să se arate că $I_n \cdot (2n+1) = 2n \cdot I_{n-1}$, $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$.

b) Să se determine formula termenului $I_n$.

**c) Să se arate că**

$$I_n = C_n^0 - \frac{1}{3}C_n^1 + \frac{1}{5}C_n^2 - \ldots + \frac{(-1)^n}{2n+1}C_n^n.$$

**A11.Se consideră șirul $(I_n)$, $I_0 = \int_0^1 e^{-x}dx$ și $I_n = \int_0^1 e^{-x}x^n dx$, $n \in \mathbb{N}^*$.**

**a) Să se calculeze $I_0$, $I_1$ și $I_2$.**

**b) Folosind integrarea prin părți, să se arate că:**

$$I_n = -\frac{1}{e} + n \cdot I_{n-1},\ n \in \mathbb{N}^*.$$

**c) Să se arate că**

$$I_n = \frac{n!}{e}\left(e - \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} - \ldots - \frac{1}{n!}\right), n \in \mathbb{N}^*.$$

***(Bacalaureat, 2002)***

## 8.2. Metoda schimbării de variabilă

### *8.2.1. Prima metodă de schimbare de variabilă*

**▣ TEOREMA 12**

Fie $J \subset \mathbb{R}$ un interval și funcțiile $[a, b] \xrightarrow{u} J \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ cu proprietățile:

**a)** u este funcție derivabilă cu derivata continuă pe intervalul $[a, b]$;

**b)** f este funcție continuă pe intervalul J.

Atunci $\int_a^b f(u(x))u'(x)dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(t)dt$,

(prima formulă de schimbare de variabilă).

<u>*Demonstrație*</u>

Funcția f este continuă pe J, deci admite primitive pe J. Fie F o primitivă a ei. Atunci funcția $F \circ u$ este o funcție derivabilă pe $[a, b]$ și $(F \circ u)'(x) = F'(u(x)) \cdot u'(x) = f(u(x)) \cdot u'(x)$, $x \in [a, b]$.

Rezultă că $F \circ u$ este o primitivă pentru funcția $(f \circ u) \cdot u'$. Aplicând formula lui Leibniz-Newton, avem: $\int_a^b f(u(x)) \cdot u'(x)dx = (F \circ u)(x)\Big|_a^b =$ $= F(u(b)) - F(u(a))$, (1).

Pe de altă parte, aplicând formula Leibniz-Newton pentru integrala din membrul drept al egalității din concluzie, rezultă:

$$\int_{u(a)}^{u(b)} f(t)dt = F(t)\Big|_{u(a)}^{u(b)} = F(u(b)) - F(u(a)),\ (2).$$

Din relațiile (1) și (2) rezultă că $\int_a^b f(u(x)) \cdot u'(x)dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(t)dt$ și teorema este demonstrată. ■

## ➢ COMENTARIU METODIC

Prima formulă de schimbare de variabilă se aplică în mod practic astfel:

- se identifică funcțiile $[a, b] \xrightarrow{u} J \xrightarrow{f} \mathbb{R}$;
- se determină noile limite de integrare $u(a)$ și $u(b)$;
- se calculează $\int_{u(a)}^{u(b)} f(t)dt$.

Funcția u se numește **funcția care schimbă variabila**.

## *Exerciții rezolvate*

☒ **1.** Să se calculeze:

**a)** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos x\, dx$; **b)** $\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^6} dx$;

**c)** $\int_0^2 (2x-1)e^{x^2-x} dx$; **d)** $\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{x^4+1}} dx$.

*Soluție*

**a)** Se consideră funcția $u: \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to [0, 1]$, $u(x) = \sin x$, derivabilă, cu $u'(x) = \cos x$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ și $u'$ continuă. Noile limite de integrare sunt $u(0) = 0$, $u\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$. Funcția $f: [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(t) = t^3$ este funcție continuă pe $[0, 1]$. În aceste condiții integrala se scrie:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} u^3(x)u'(x)dx = \int_{u(0)}^{u\left(\frac{\pi}{2}\right)} f(t)dt = \int_0^1 t^3 dt = \frac{t^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{1}{4}.$$

**b)** Se alege funcția $u: [0, 1] \to [0, 1]$, $u(x) = x^3$, funcție derivabilă cu derivata $u'(x) = 3x^2$, $x \in [0, 1]$, funcție continuă.

Rezultă că $u(0) = 0$, $u(1) = 1$. Funcția $f: [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$ este funcție continuă. Aplicând prima formulă de schimbare de variabilă se obține: $\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^6} dx = \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{u'(x)}{1+u^2(x)} dx = \frac{1}{3}\int_{u(0)}^{u(1)} f(t)dt = \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt =$

$= \frac{1}{3} \operatorname{arctg} t \Big|_0^1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi}{4}.$

**c)** Se consideră funcția $u:[0, 2]\to\left[-\frac{1}{4}, 2\right]$, $u(x)=x^2-x$, derivabilă și cu derivata $u'(x)=2x-1$, $x\in[0, 2]$, funcție continuă. Funcția $f:\left[-\frac{1}{4}, 2\right]\to\mathbb{R}$, $f(t)=e^t$ este continuă pe $\left[-\frac{1}{4}, 2\right]$. Noile limite de integrare sunt $u(0)=0$, $u(2)=2$. Integrala se scrie astfel:

$$\int_0^2(2x-1)e^{x^2-x}dx=\int_0^2 u'(x)e^{u(x)}dx=\int_{u(0)}^{u(2)}f(t)dt=\int_0^2 e^t dt=e^t\Big|_0^2=e^2-1.$$

**d)** Se alege funcția $u:[0, 2]\to[0, 4]$, $u(x)=x^2$, funcție derivabilă cu derivata $u'(x)=2x$, $x\in[0, 2]$, continuă. Noile limite de integrare sunt $u(0)=0$, $u(2)=4$, iar funcția $f:[0, 4]\to\mathbb{R}$, $f(t)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$ este funcție continuă pe intervalul $[0, 4]$.

În aceste condiții, integrala dată se scrie:

$$\int_0^2\frac{x}{\sqrt{x^4+1}}dx=\frac{1}{2}\int_0^2\frac{u'(x)}{\sqrt{u^2(x)+1}}dx=\int_{u(0)}^{u(2)}f(t)dt=\int_0^4\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}dt=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\ln\left(t+\sqrt{t^2+1}\right)\Big|_0^4=\frac{1}{2}\ln\left(4+\sqrt{17}\right).$$

☒ **2.** Fie $a>0$ și $f:[-a, a]\to\mathbb{R}$ o funcție continuă. Atunci:

**a)** $\int_{-a}^{a}f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx$, dacă f este funcție pară;

**b)** $\int_{-a}^{a}f(x)dx=0$, dacă f este funcție impară.

*Soluție*

Din ipoteza că f este funcție continuă pe $[-a, a]$ rezultă că f este funcție integrabilă pe $[-a, a]$. Aplicând proprietatea de aditivitate la interval, se obține:

$\int_{-a}^{a}f(x)dx=\int_{-a}^{0}f(x)dx+\int_0^a f(x)dx$, (1).

Dar $\int_{-a}^{0}f(x)=-\int_0^{-a}f(x)dx.$

> ❑ **NE REAMINTIM!**
> Funcția $f:[-a, a]\to\mathbb{R}$ este funcție pară dacă $f(-x)=f(x)$, $\forall\ x\in[-a, a]$ și este funcție impară dacă $f(-x)=-f(x)$, $\forall\ x\in[-a, a]$.

Pentru această ultimă integrală aplicăm schimbarea de variabilă luând $u(x)=-x$, $x\in[0, a]$ și obținem:

$$-\int_0^{-a} f(x)dx = \int_0^{-a} u'(x)\cdot f(-u(x))dx = \int_{u(0)}^{u(-a)} f(-t)dt = \int_0^a f(-x)dx =$$

$$= \begin{cases} \int_0^a f(x)dx, \text{ dacă } f \text{ este pară} \\ -\int_0^a f(x)dx, \text{ dacă } f \text{ este impară} \end{cases}, \quad (2).$$

Din (1) și (2) se obține, pe rând:

**a)** $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx,$ dacă f este funcție pară;

**b)** $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0,$ dacă f este funcție impară.

## *Aplicație*

☒ Să se calculeze: **a)** $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{x^4} \sin x\, dx;$ **b)** $\int_{-\frac{2\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \cos x\, dx.$

<u>*Soluție*</u>

**a)** Funcția $f:\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}, f(x) = e^{x^4} \sin x$ este funcție impară. Rezultă că $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = 0.$

**b)** Funcția $f:\left[-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right] \to \mathbb{R}, f(x) = \cos x$ este funcție pară. Rezultă că $\int_{-\frac{2\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \cos x\, dx = 2\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \cos x\, dx = 2\sin x \Big|_0^{\frac{2\pi}{3}} = 2\sin\frac{2\pi}{3} = \sqrt{3}.$

☒ **3.** Să se calculeze $I = \int_{\frac{3}{2}}^{2} \sqrt{x^2 - 4x + 6}\, dx.$

<u>*Soluție*</u>

Expresia de sub radical se scrie sub forma canonică astfel:

$x^2 - 4x + 6 = (x-2)^2 + 2.$

Pentru integrarea prin metoda schimbării de variabilă, alegem funcția $u:\left[\frac{3}{2}, 2\right] \to \left[-\frac{1}{2}, 0\right],$ $u(x) = x - 2,$ derivabilă și cu derivata $u'(x) = 1,$ $x \in \left[\frac{3}{2}, 2\right]$ funcție continuă. Noile limite de integrare sunt $u\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{2},$ $u(2) = 0.$

Funcția $f:\left[-\frac{1}{2}, 0\right]\to\mathbb{R}, f(t)=\sqrt{t^2+2}$ este continuă pe $\left[-\frac{1}{2}, 0\right]$.

În aceste condiții avem: $I=\int_{\frac{3}{2}}^{2}\sqrt{u^2(x)+2}\cdot u'(x)dx=\int_{-\frac{1}{2}}^{0}\sqrt{t^2+2}\,dt=$

$$=\frac{1}{2}\left[t\sqrt{t^2+2}+2\ln\left(t+\sqrt{t^2+2}\right)\right]\Bigg|_{-\frac{1}{2}}^{0}=\ln\sqrt{2}+\frac{3}{8}.$$

☒ **4.** Să se calculeze integrala $I=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{\cos x}dx$.

*Soluție*

**Metoda 1.** Avem $I=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\cos x}{\cos^2 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\cos x}{1-\sin^2 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{(\sin x)'}{1-\sin^2 x}dx=$

$$=-\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{t^2-1}dt=-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\Bigg|_0^{\frac{1}{2}}=\ln\sqrt{3}.$$

**Metoda 2.** Exprimăm $\cos x$ în funcție de $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ și avem:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}dx=-2\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)'}{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}-1}dx=$$

$$=-2\int_0^{2-\sqrt{3}}\frac{1}{t^2-1}dt=-\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\Bigg|_0^{2-\sqrt{3}}=\ln\sqrt{3}.$$

❑ **NE REAMINTIM!**

- $\sin x=\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$;
- $\cos x=\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$.

☒ **5.** Să se calculeze integrala $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{2\operatorname{tg}x}{4\cos^2 x+\sin^2 x}dx$.

*Soluție*

Exprimăm $\sin x$ și $\cos x$ în funcție de $\operatorname{tg}x$ și avem:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{2\operatorname{tg}x\cdot\left(1+\operatorname{tg}^2x\right)}{4+\operatorname{tg}^2x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{2\operatorname{tg}x\cdot(\operatorname{tg}x)'}{4+\operatorname{tg}^2x}dx=$$

$$=\int_0^1\frac{2t}{4+t^2}dt=\int_0^1\frac{\left(4+t^2\right)'}{4+t^2}dt=\ln\left(t^2+4\right)\Big|_0^1=\ln\frac{5}{4}.$$

❑ **NE REAMINTIM!**

- $\sin^2 x=\dfrac{\operatorname{tg}^2x}{1+\operatorname{tg}^2x}$;
- $\cos^2 x=\dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2x}$.

# EXERCIȚII ȘI PROBLEME

## EXERSARE

**E1.** Folosind metoda schimbării de variabilă, să se calculeze integralele:

a) $\int_1^2 (x-3)^6 dx$;

b) $\int_{-1}^1 6x^2\left(2x^3+1\right)^4 dx$;

c) $\int_1^2 \frac{1}{(2x+1)^3} dx$;

d) $\int_{-1}^0 \sqrt[3]{(x-2)} dx$;

e) $\int_{-1}^0 4x^3\sqrt{x^4+1} dx$;

f) $\int_{-1}^1 \frac{x^2}{\left(2x^3+3\right)^3} dx$;

g) $\int_0^{\sqrt{e-1}} \frac{x}{x^2+1} dx$;

h) $\int_{-1}^1 \frac{2x+3}{x^2+3x+5} dx$;

i) $\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{2x}{x^4-1} dx$;

j) $\int_0^{\sqrt[3]{2}} \frac{3x^2}{16-x^6} dx$;

k) $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{1}{4x^2+3} dx$;

l) $\int_0^1 \frac{2x}{x^4+1} dx$.

**E2.** Să se calculeze folosind schimbarea de variabilă:

a) $\int_0^1 xe^{x^2} dx$;

b) $\int_0^1 x\cdot 3^{-2x^2} dx$;

c) $\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx$;

d) $\int_2^{e+1} \frac{1}{x-1}\cdot \ln^4(x-1) dx$;

e) $\int_{\sqrt{e}}^{e} \frac{1}{x\cdot \ln^3 x} dx$;

f) $\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{0} \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}} dx$;

g) $\int_{\sqrt[3]{2}}^{\sqrt[3]{3}} \frac{x^2}{\sqrt{x^6-1}} dx$;

h) $\int_0^1 \frac{6x^2}{\sqrt{x^6+1}} dx$.

**E3.** Să se verifice dacă următoarele egalități sunt adevărate:

a) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos 3x\, dx = \frac{1}{3}$;

b) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 4x\, dx = -\frac{1}{2}$;

c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1+\sin^4 x} dx = \frac{\pi}{4}$;

d) $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2+1} \operatorname{arctg}^2 x\, dx = \frac{\pi^3}{96}$;

e) $\int_{\frac{2}{\pi}}^{\frac{3}{\frac{\pi}{2}}} \frac{1}{x^2}\cdot \sin\frac{1}{x} dx = \frac{1}{2}$;

f) $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}\cdot \arcsin^4 x} dx = \frac{63}{\pi^3}$.

**E4.** Să se arate că:

a) $\int_{-3}^3 e^{x^2+1}\cdot \sin^5 x\, dx = 0$;

b) $\int_{-2}^2 \frac{x^6 \operatorname{arctg} x^3}{\sqrt{x^4+x^2+1}} dx = 0$.

## APROFUNDARE

**A1.** Să se calculeze utilizând metoda schimbării de variabilă:

a) $\int_{-1}^{1} \frac{x^2+4x}{x^3+6x^2+1}dx$;

b) $\int_{0}^{1} \frac{x}{\sqrt{3x^2+1}}dx$;

c) $\int_{1}^{4} \frac{3^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$;

d) $\int_{0}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{3-2x}{2x^2+1}dx$;

e) $\int_{0}^{1} \frac{x\left(1+x^2\right)}{1+x^4}dx$;

f) $\int_{0}^{\sqrt{5}} \frac{2x+1}{\sqrt{2x^2+8}}dx$;

g) $\int_{0}^{3} \sqrt[3]{(3x-1)^2}dx$;

h) $\int_{-1}^{7} \frac{1}{\sqrt[4]{(x+2)^3}}dx$;

i) $\int_{1}^{\sqrt{3}} \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}dx$;

j) $\int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{2} \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx$;

k) $\int_{\sqrt[4]{2}}^{\sqrt{2}} \frac{1}{x\sqrt{x^4-1}}dx$;

l) $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{x\sqrt{x^4+x^2+1}}dx$;

m) $\int_{-1}^{1} \sqrt{x^2+6x+10}\,dx$;

n) $\int_{2}^{5} \sqrt{-x^2+7x-6}\,dx$.

**A2.** Să se calculeze integralele:

a) $\int_{1}^{e} \frac{\ln x}{x(2+\ln x)}dx$;

b) $\int_{1}^{\sqrt{e}} \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}dx$;

c) $\int_{0}^{1} \frac{1}{1+e^x}dx$;

d) $\int_{1}^{2} \frac{1}{e^x-1}dx$;

e) $\int_{\ln 2}^{1} \frac{e^{2x}}{e^x-1}dx$;

f) $\int_{\ln\sqrt{2}}^{\ln 2} \sqrt{\frac{e^x-1}{e^x+1}}\,dx$.

**A3.** Să se calculeze integralele:

a) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^2 x-4}dx$;

b) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos^2 x+3}dx$;

c) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}dx$;

d) $\int_{0}^{\sqrt{\frac{\pi}{4}}} x\cdot\sin x^2\cdot\cos x^2 dx$;

e) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\text{tg}^3 x+\text{tg}\, x\right)dx$;

f) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \text{ctg}^3 x\,dx$;

g) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{4-\sin^2 x}}dx$;

h) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\sqrt{\sin^4 x+1}}dx$;

i) $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\arcsin x}{x^2}dx$;

j) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x\sqrt{\cos 2x}}dx$.

**A4.** Să se calculeze integralele:

a) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\cdot\cos 3x\,dx$;

b) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin 2x\cdot\sin 4x\,dx$;

c) $\int_{0}^{2\pi} \cos ax\cdot\cos bx\,dx,\ a,\ b\in\mathbb{N}$;

d) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin x \cdot \sin 3x \cdot \cos 2x \, dx$;

e) $\int_0^{\pi} \sin x \cdot \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x \cdot \ldots \cdot \cos 2^{n-1}x \, dx$.

**A5.** Să se calculeze integralele:

a) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x} dx$;

b) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^4 x} dx$;

c) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^4 x} dx$;

d) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^6 x} dx$;

e) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\cos x}{\sqrt{7 + \cos 2x}} dx$.

**A6.** Să se calculeze integralele:

a) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{1 + \sin x} dx$;

b) $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{0} \frac{\sin x}{1 + \sin x} dx$;

c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \sin x + \cos x} dx$;

d) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{2\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}}{9\cos^2 x + \sin^2 x} dx$;

e) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\operatorname{tg}^6 x} dx$;

f) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^4 x \cdot \sin^2 x} dx$;

g) $\int_0^{\frac{\pi}{8}} \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$;

h) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 - \sin x}{2 + \cos x} dx$.

**A7.** Să se calculeze integralele:

$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$;

$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx$.

**A8.** Se dau următoarele integrale:

$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1 + \sin x + \cos x} dx$,

$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 + \sin x + \cos x} dx$.

Să se calculeze $I + J$, $I - J$, $I$, $J$.

**A9.** Calculând în două moduri integrala $\int_0^1 (1 + x)^n dx$, $n \in \mathbb{N}^*$, să se arate că

$$\frac{C_n^0}{1} + \frac{C_n^1}{2} + \ldots + \frac{C_n^n}{n+1} = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}.$$

**A10.** Calculând în două moduri integrala $\int_0^1 x(1 + x)^n dx$, $n \in \mathbb{N}^*$, să se arate că

$$\frac{C_n^0}{2} + \frac{C_n^1}{3} + \ldots + \frac{C_n^n}{n+2} = \frac{n \cdot 2^{n+1} + 1}{(n+1)(n+2)}.$$

### *8.2.2. A doua metodă de schimbare de variabilă*

**▣ TEOREMA 13**

Fie funcțiile $[a, b] \xrightarrow{u} [c, d] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ cu proprietățile:

**a)** u este funcție bijectivă, u și $u^{-1}$ sunt funcții derivabile cu derivatele continue pe intervalul $[a, b]$;

**b)** f este funcție continuă pe intervalul $[c, d]$.

Atunci $\int_a^b f(u(x))dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(t)(u^{-1})'(t)dt$,

**(a doua formulă de schimbare de variabilă)**.

*Demonstrație*

Funcțiile f și u fiind continue, rezultă că $f \circ u$ este funcție continuă pe intervalul $[a, b]$, deci admite primitive pe $[a, b]$. Fie G o primitivă a funcției $f \circ u$ pe intervalul $[a, b]$.

Conform formulei lui Leibniz-Newton se poate scrie:

$\int_a^b f(u(x))dx = G(b) - G(a)$, (1).

Pe de altă parte, $(G \circ u^{-1})'(t) = G'(u^{-1}(t))(u^{-1})'(t) = f(u(u^{-1}(t)))\cdot$

$\cdot (u^{-1})'(t) = f(t) \cdot (u^{-1})'(t)$.

Rezultă că $\int_{u(a)}^{u(b)} f(t)(u^{-1})'(t)dt = (G \circ u^{-1})(t)\Big|_{u(a)}^{u(b)} = G(b) - G(a)$, (2).

Din relațiile (1) și (2) se obține relația din enunț. ■

## *Exerciții rezolvate*

☒ **1.** Să se calculeze $\int_1^3 \frac{\sqrt{x}}{x+1}dx$.

*Soluție*

Avem $\frac{\sqrt{x}}{x+1} = \frac{\sqrt{x}}{(\sqrt{x})^2 + 1} = f(u(x))$, $x \in [1, 3]$.

Alegem funcțiile $u : [1, 3] \to [1, \sqrt{3}]$, $u(x) = \sqrt{x}$, funcție bijectivă și derivabilă și $f : [1, \sqrt{3}] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$, funcție continuă.

Funcția inversă $u^{-1} : [1, \sqrt{3}] \to [1, 3]$, $u^{-1}(t) = t^2$ este funcție derivabilă cu derivata funcție continuă.

Aplicând a doua formulă de schimbare de variabilă se obține:

$$\int_1^3 \frac{\sqrt{x}}{x+1}dx = \int_1^3 f(u(x))dx = \int_{u(1)}^{u(3)} f(t)\cdot\left(u^{-1}\right)'(t)dt = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{t}{t^2+1}\cdot 2t\,dt =$$

$$= 2\int_1^{\sqrt{3}}\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)dt = 2(t-\operatorname{arctg} t)\Big|_1^{\sqrt{3}} = 2\left(\sqrt{3}-1-\frac{\pi}{12}\right).$$

☒ **2.** Să se calculeze $\int_1^4 \ln\left(1+\sqrt{x}\right)dx.$

<u>*Soluție*</u>

Se definesc funcțiile:

$u:[1, 4]\to[2, 3],\ u(x)=1+\sqrt{x},\ u^{-1}:[2, 3]\to[1, 4],\ u^{-1}(t)=(t-1)^2.$
$f:[2, 3]\to\mathbb{R},\ f(x)=\ln x.$

Funcțiile f, u, $u^{-1}$ satisfac condițiile teoremei de schimbare de variabilă și ca urmare are loc egalitatea:

$$\int_1^4 \ln\left(1+\sqrt{x}\right)dx = \int_1^4 f(u(x))dx = \int_{u(1)}^{u(4)} f(t)\cdot\left(u^{-1}\right)'(t)dt = \int_2^3 2(t-1)\cdot\ln t\,dt.$$

Ultima integrală se calculează prin metoda integrării prin părți și se obține:

$$\int_2^3 2(t-1)\ln t\,dt = \int_2^3\left[(t-1)^2\right]'\ln t\,dt = (t-1)^2\cdot\ln t\Big|_2^3 - \int_2^3\frac{(t-1)^2}{t}dt =$$

$$= 4\ln 3-\ln 2-\int_2^3\left(t-2+\frac{1}{t}\right)dt = 4\ln 3-\ln 2-\left(\frac{t^2}{2}-2t+\ln t\right)\Big|_2^3 = 3\ln 3-\frac{1}{2}.$$

Așadar, $\int_1^4 \ln\left(1+\sqrt{x}\right)dx = 3\ln 3-\frac{1}{2}.$

## EXERCIȚII ȘI PROBLEME

### EXERSARE

**E1. Utilizând metoda a doua de schimbare de variabilă, să se calculeze:**

**a)** $\int_{\frac{1}{4}}^{1}\left(1+\sqrt{x}\right)^5 dx;$

**b)** $\int_{\frac{1}{8}}^{1}\left(1-\sqrt[3]{x}\right)^4 dx;$

**c)** $\int_1^4 \frac{\sqrt{x}}{x+4}dx;$ **d)** $\int_4^9 \frac{1}{2+\sqrt{x}}dx.$

**E2. Să se calculeze integralele:**

**a)** $\int_1^8 \frac{1}{1+\sqrt[3]{x}}dx;$

**b)** $\int_3^8 \frac{1}{x\sqrt{x+1}}dx;$

**c)** $\int_2^4 \frac{\sqrt{x-1}}{x}dx.$

## APROFUNDARE

**A1.** Aplicând metoda a doua de schimbare de variabilă, să se verifice dacă au loc egalitățile:

a) $\int_1^{64} \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}dx = 11 + 6\ln\frac{2}{3}$;

b) $\int_{\ln 2}^{\ln 3} e^x \cdot \ln\left(1+e^x\right)dx = \ln\frac{256}{27e}$;

c) $\int_1^{8} \frac{x}{\sqrt{1+3x}}dx = 8$;

d) $\int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{2} \frac{1}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+2}}dx = \frac{\pi}{6}$.

**A2.** Să se calculeze integralele:

a) $\int_{\ln 2}^{\ln 4} \sqrt{e^x - 1}dx$;

b) $\int_1^{27} \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}dx$;

c) $\int_1^{4} \cos^2 \sqrt{x}dx$;

d) $\int_0^{3} \sin\sqrt{x+1}dx$.

**A3.** Să se verifice egalitățile:

a) $\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{e^x+1}dx = \frac{1}{3}$;

b) $\int_{-1}^{1} \frac{1}{\left(x^2+1\right)\left(e^x+1\right)}dx = \frac{\pi}{4}$;

c) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1+\operatorname{tg} x\right)dx = \frac{\pi}{8}\ln 2$.

## DEZVOLTARE

**D1.** Fie $f:[a, b]\to\mathbb{R}$ funcție continuă.

a) Să se arate că $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$.

b) Dacă $f(x) = f(a+b-x)$, $\forall\ x\in[a, b]$, să se arate că $\int_a^b x\cdot f(x)dx = \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx$.

c) Dacă $2f(x)+3f(a+b-x)=5$, $\forall\ x\in[a, b]$, să se calculeze $\int_a^b f(x)dx$.

**D2.** Fie $f:[0, 1]\to\mathbb{R}$ o funcție continuă. Să se arate că:

a) $\int_0^{\pi} x f(\sin x)dx = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx$;

b) $\int_0^{\pi} f(\sin x)dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx$.

**D3.** Fie $f:[a, b]\to\mathbb{R}$, o funcție continuă. Să se calculeze:

a) $\int_a^b \frac{f(x-a)}{f(x-a)+f(b-x)}dx$;

b) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n x}{\sin^n x + \cos^n x}dx,\ n\in\mathbb{N}^*$,

$J = \int_1^{2} \frac{\operatorname{arctg} x}{\operatorname{arctg}\frac{1}{x^2-3x+3}}dx$.

## TESTE DE EVALUARE

### Testul 1

❍1. **Să se calculeze:**

**Grupa 1:**

a) $\int_0^{\pi}(2x+3)\sin x\,dx$;

b) $\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos x\sqrt{6\sin x+1}dx$;

c) $\int_1^4\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}dx$.

**Grupa 2:**

a) $\int_0^{\pi}(3x-1)\cos x\,dx$;

b) $\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin x\sqrt{10\cos x+4}\,dx$;

c) $\int_1^8\frac{1}{2+\sqrt[3]{x}}dx$.

❍2. **Să se determine valoarea integrală medie pentru funcția:**

**Grupa 1:**

$f:\left[0,\ \frac{3\sqrt{3}}{2}\right]\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{1}{\sqrt{9-x^2}}+x.$

**Grupa 2:**

$f:\left[0,\ \sqrt{2}\right]\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2}}.$

### Testul 2

❍1. **Fie funcția $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, derivabilă și cu proprietatea:**

$$x+\int_0^x f(t)\,dt=(x+1)f(x),\ \forall\ x\in[0,+\infty).$$

**Dacă $\alpha=f(3)-f(1)$, atunci:**

**a)** $\alpha=\ln 2$; **b)** $\alpha=1-\ln 3$; **c)** $\alpha=\ln 3$; **d)** $\alpha=2$.

*(3 puncte)*
*(Admitere ASE, București, 2003)*

❍2. **Să se calculeze integralele:**

a) $\int_0^1\left(x-x^3\right)\cdot e^{-x^2}dx$;   b) $\int_0^4\frac{1}{(x+1)+\sqrt{2x+1}}dx$.

*(3 puncte)*

❍3. **Să se calculeze** $\int_{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}}^{\sqrt[3]{\frac{3}{4}}}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^3}}dx$.

*(Univ. din Oradea, 1999)*
*(3 puncte)*

## Testul 3

**○1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\int_0^x e^{t^2}\left(t^3-3t+2\right)dt.$**

**Dacă $A=\{x\in\mathbb{R}\mid x \text{ este punct de extrem al lui } f\}$, atunci:**

**a) $A=\{-2\}$; b) $A=\{-2, 1\}$; c) $A=\{1\}$; d) $A=\varnothing$.**

***(3 puncte)***
***(Admitere ASE, București, 2003)***

**○2. Fie $a, b\in\mathbb{R}$ și funcția continuă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ care verifică relația:**

**$f(a-x)+f(a+x)=2b,\ \forall\ x\in\mathbb{R}$. Dacă $I=\int_0^{2a} f(t)\,dt$, atunci:**

**a) $I=a+b$; b) $I=2ab$; c) $I=\frac{a+b}{2}$; d) $I=\frac{ab}{2}$.**

***(3 puncte)***

**○3. Fie șirul de integrale $(I_n)$, $I_n=\int_1^e (\ln x)^n\,dx,\ n\in\mathbb{N}^*$.**

**a) Să se calculeze $I_1$ și $I_2$.**

**b) Să se arate că șirul $(I_n)$ este monoton și mărginit.**

**c) Să se găsească o relație de recurență pentru $(I_n)$.**

**d) Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} I_n=0$.**

***(3 puncte)***



# Calculul integralelor funcțiilor raționale

Până acum s-a realizat calculul unui număr suficient de integrale de funcții $f:[a, b]\to\mathbb{R}$, utilizând formula lui Leibniz-Newton, metoda integrării prin părți sau metoda schimbării de variabilă. În continuare se vor întâlni și alte tehnici de calcul pentru integralele unor funcții integrabile.

**Situație-problemă:**

Se consideră funcția $f:[-2, 1]\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{9x+2}{x^2+x-6}$.

**a)** Este funcția f integrabilă pe $[-2, 1]$?

**b)** Dacă f este integrabilă pe $[-2, 1]$, cum se calculează integrala sa?

*Soluție*

**a)** Funcția f este funcție continuă pe intervalul $[-2, 1]$ fiind rezultatul operațiilor cu funcții continue pe intervalul $[-2, 1]$. Ca urmare f este funcție integrabilă pe intervalul $[-2, 1]$.

**b)** În ceea ce privește calculul integralei funcției f se observă că nici una din metodele folosite până acum nu se poate aplica în mod direct.

De aceea va fi nevoie de parcurgerea unui algoritm în care se vor întâlni în multe cazuri și metodele de calcul deja cunoscute.

❖ **DEFINIȚII**

Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval de numere reale.

- Funcția $f: I \to \mathbb{R}$ se numește **funcție rațională** dacă există două funcții polinomiale P, Q, astfel încât pentru oricare $x \in I$, $Q(x) \neq 0$ și $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$.
- O funcție rațională f se numește **funcție rațională simplă** dacă are una din formele:

I. $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, $a_k \in \mathbb{R}$, $k = \overline{0, n}$;

II. $f(x) = \dfrac{A}{(x-a)^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $x \neq a$, $A \in \mathbb{R}$;

III. $f(x) = \dfrac{Bx + C}{\left(ax^2 + bx + c\right)^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $b^2 - 4ac < 0$, $B, C \in \mathbb{R}$.

## 9.1. Calculul integralei unei funcții raționale simple

În acest paragraf se va da procedeul de calcul al integralei definite a unei funcții raționale simple de tipul I, II și III.

**I. Integrale de forma $\int_\alpha^\beta f_n(x)\,dx$, $f_n$ funcție polinomială de gradul n**

Dacă $f_n : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ este funcție polinomială de gradul n, atunci, cu ajutorul formulei lui Leibniz-Newton, se obține $\int_\alpha^\beta \left(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0\right)dx =$

$$= \left(a_n \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} + a_{n-1} \cdot \frac{x^n}{n} + \ldots + a_1 \cdot \frac{x^2}{2} + a_0 x\right)\Bigg|_\alpha^\beta. \quad (1)$$

☞ ***Exemplu***

$$\int_{-1}^{2} \left(6x^5 - 8x^3 - 3x^2 + 4x - 1\right)dx = \left(6 \cdot \frac{x^6}{6} - 8 \cdot \frac{x^4}{4} - 3 \cdot \frac{x^3}{3} + 4 \cdot \frac{x^2}{2} - x\right)\Bigg|_{-1}^{2} = \left(x^6 - 2x^4 -\right.$$

$$\left.- x^3 + 2x^2 - x\right)\Big|_{-1}^{2} = 2^6 - 2 \cdot 2^4 - 2^3 + 2 \cdot 2^2 - 2 - \left[(-1)^6 - 2(-1)^4 - (-1)^3 + 2(-1)^2 - (-1)\right] = 30 - 3 = 27.$$

## II. Integrale de forma $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{A}{(x-a)^n} dx$, $n \in \mathbb{N}^*$, $a \notin [\alpha, \beta]$

**1.** Dacă $n = 1$, atunci $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{A}{x-a} dx = A \ln|x-a| \Big|_{\alpha}^{\beta}$. (2)

**2.** Dacă $n \geq 2$, atunci se folosește metoda schimbării de variabilă și se obține integrala unei funcții putere:

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{A}{(x-a)^n} dx = A\int_{\alpha}^{\beta} (x-a)^{-n} dx = A\int_{\alpha}^{\beta} u^{-n}(x) \cdot u'(x) dx = A\int_{u(\alpha)}^{u(\beta)} t^{-n} dt =$$

$$= -\frac{A}{n-1} \cdot \frac{1}{t^{n-1}} \Bigg|_{u(\alpha)}^{u(\beta)}. \quad (3)$$

### *Exercițiu rezolvat*

☒ Să se calculeze următoarele integrale de funcții raționale simple:

**a)** $\int_{3}^{e+2} \frac{1}{x-2} dx$; **b)** $\int_{0}^{\frac{e-1}{3}} \frac{1}{3x+1} dx$; **c)** $\int_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} \frac{1}{(2x-6)^3} dx$.

<u>*Soluție*</u>

**a)** Aplicând formula (2) se obține:

$$\int_{3}^{e+2} \frac{1}{x-2} dx = \ln|x-2| \Big|_{3}^{e+2} = \ln e - \ln 1 = 1.$$

**b)** Integrala se scrie succesiv astfel:

$$\int_{0}^{\frac{e-1}{3}} \frac{1}{3x+1} dx = \int_{0}^{\frac{e-1}{3}} \frac{1}{3\left(x+\frac{1}{3}\right)} dx = \frac{1}{3}\int_{0}^{\frac{e-1}{3}} \frac{1}{x+\frac{1}{3}} dx \overset{(2)}{=} \frac{1}{3} \ln\left|x+\frac{1}{3}\right| \Bigg|_{0}^{\frac{e-1}{3}} =$$

$$= \frac{1}{3}\left[\ln\left(\frac{e-1}{3}+\frac{1}{3}\right) - \ln\frac{1}{3}\right] = \frac{1}{3}\left(\ln\frac{e}{3} - \ln\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}\ln e = \frac{1}{3}.$$

Calculele mai pot fi organizate și astfel:

$$\int_{0}^{\frac{e-1}{3}} \frac{1}{3x+1} dx = \frac{1}{3}\int_{0}^{\frac{e-1}{3}} \frac{3}{3x+1} dx = \frac{1}{3}\int_{0}^{\frac{e-1}{3}} \frac{(3x+1)'}{3x+1} dx = \frac{1}{3}\int_{0}^{\frac{e-1}{3}} \frac{u'(x)}{u(x)} dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int_{u(0)}^{u\left(\frac{e-1}{3}\right)} \frac{1}{t} dt = \frac{1}{3}\ln|t| \Big|_{1}^{e} = \frac{1}{3}(\ln e - \ln 1) = \frac{1}{3}.$$

**c) Metoda 1.**

$$\int_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} \frac{1}{(2x-6)^3}dx = \int_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} \frac{1}{2^3(x-3)^3}dx = \frac{1}{8}\int_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}}(x-3)^{-3}dx \overset{(3)}{=} \frac{1}{8}\int_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} u^{-3}(x)\cdot$$

$$\cdot u'(x)dx = \int_{u\left(\frac{3}{2}\right)}^{u\left(\frac{5}{2}\right)} t^{-3}dt = \frac{1}{8}\int_{-\frac{3}{2}}^{-\frac{1}{2}} t^{-3}dt = \frac{1}{8}\left(-\frac{1}{2t^2}\right)\Bigg|_{-\frac{3}{2}}^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{16}\left(4-\frac{4}{9}\right) = -\frac{2}{9}.$$

**Metoda 2.**

Această integrală se poate calcula aplicând mai întâi metoda schimbării de variabilă și apoi formula (3). Calculele decurg astfel:

$$\int_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} \frac{1}{(2x-6)^3}dx = \frac{1}{2}\int_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} \frac{2}{(2x-6)^3}dx = \frac{1}{2}\int_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} \frac{u'(x)}{u^3(x)}dx = \frac{1}{2}\int_{u\left(\frac{3}{2}\right)}^{u\left(\frac{5}{2}\right)} \frac{1}{t^3}dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-3}^{-1} t^{-3}dt = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2t^2}\right)\Bigg|_{-3}^{-1} = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{18}\right) = -\frac{2}{9}.$$

## III. Integrale de forma $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{Bx+C}{\left(ax^2+bx+c\right)^n}dx$, $b^2-4ac<0$, $n \in \{1, 2\}$ și $B, C \in \mathbb{R}$

În funcție de valorile numărului natural n și a coeficienților B, C, a, b, c apar următoarele tipuri de integrale:

### 1. Integrale de forma $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{Bx+C}{x^2+a^2}$, $a \neq 0$

Se deosebesc următoarele situații:

**a)** Dacă B = 0 și C = 1 se obține integrala cunoscută:

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\Bigg|_{\alpha}^{\beta}.$$

**b)** Dacă B = 1, C = 0 se obține integrala:

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{x}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \frac{2x}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \frac{\left(x^2+a^2\right)'}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \frac{u'(x)}{u(x)}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{u(\alpha)}^{u(\beta)} \frac{1}{t}dt = \frac{1}{2}\ln|t|\Bigg|_{u(\alpha)}^{u(\beta)}.$$

**c)** Dacă B ≠ 0, C ≠ 0, atunci se obține integrala:
$\int_\alpha^\beta \frac{Bx+C}{x^2+a^2}dx = B\int_\alpha^\beta \frac{x}{x^2+a^2}dx + C\int_\alpha^\beta \frac{1}{x^2+a^2}dx$ și calculul se continuă ca la punctele a) și b).

### *Exercițiu rezolvat*

☒ Să se calculeze integralele de funcții raționale:

**a)** $\int_0^4 \frac{dx}{x^2+16}dx$; **b)** $\int_1^5 \frac{x}{x^2+7}dx$; **c)** $\int_2^{2\sqrt{3}} \frac{3x-2}{x^2+4}dx.$

<u>*Soluție*</u>

**a)** Avem: $\int_0^4 \frac{dx}{x^2+16} = \frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x}{4}\Big|_0^4 = \frac{1}{4}(\operatorname{arctg}1 - \operatorname{arctg}0) = \frac{\pi}{16}.$

**b)** $\int_1^5 \frac{x}{x^2+7}dx = \frac{1}{2}\int_1^5 \frac{2x}{x^2+7}dx = \frac{1}{2}\int_1^5 \frac{\left(x^2+7\right)'}{x^2+7}dx = \frac{1}{2}\int_1^5 \frac{u'(x)}{u(x)}dx =$

$= \frac{1}{2}\int_{u(1)}^{u(5)} \frac{1}{t}dt = \frac{1}{2}\ln|t|\Big|_8^{32} = \frac{1}{2}(\ln 32 - \ln 8) = \frac{1}{2}\ln 4 = \ln 2.$

**c)** Integrala se scrie succesiv astfel:

$\int_2^{2\sqrt{3}} \frac{3x-2}{x^2+4}dx = \int_2^{2\sqrt{3}} \frac{3x}{x^2+4}dx - 2\int_2^{2\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2+4} = \frac{3}{2}\int_2^{2\sqrt{3}} \frac{2x}{x^2+4}dx -$

$-2\cdot\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\Big|_2^{2\sqrt{3}} = \frac{3}{2}\int_2^{2\sqrt{3}} \frac{\left(x^2+4\right)'}{x^2+4}dx - \operatorname{arctg}\sqrt{3} + \operatorname{arctg}1 = \frac{3}{2}\int_2^{2\sqrt{3}} \frac{u'(x)}{u(x)}dx -$

$-\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} = \frac{3}{2}\int_{u(2)}^{u(2\sqrt{3})} \frac{1}{t}dt - \frac{\pi}{12} = \frac{3}{2}\ln|t|\Big|_8^{16} - \frac{\pi}{12} = \frac{3}{2}(\ln 16 - \ln 8) - \frac{\pi}{12} = \frac{3}{2}\ln 2 - \frac{\pi}{12}.$

### 2. Integrale de forma $\int_\alpha^\beta \frac{Ax+B}{\left(x^2+a^2\right)^2}dx$, a ≠ 0

Se deosebesc următoarele situații:

**a)** Dacă A = 1 și B = 0 se obține integrala de forma $\int_\alpha^\beta \frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^2}dx$ care se calculează cu ajutorul metodei de schimbare de variabilă.

Se obține succesiv:

$\int_\alpha^\beta \frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^2}dx = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \frac{\left(x^2+a^2\right)'}{\left(x^2+a^2\right)^2}dx = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \frac{u'(x)}{u^2(x)}dx =$

$$=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}u'(x)\cdot u^{-2}(x)dx=\frac{1}{2}\int_{u(\alpha)}^{u(\beta)}t^{-2}dt=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t}\Big|_{u(\alpha)}^{u(\beta)}.$$

**b)** Dacă A = 0 și B = 1 se obține integrala de forma $\int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{\left(x^2+a^2\right)^2}dx.$

Pentru calculul acestei integrale de funcție rațională se parcurge următorul algoritm:

- se amplifică funcția de integrat cu $a^2$ (dacă $a \neq 1$);
- se adună și se scade $x^2$ la numărătorul fracției;
- se desparte integrala în sumă de două integrale: o integrală este de tipul III.1.a), iar cealaltă integrală se calculează prin metoda integrării prin părți.

Calculele se organizează astfel:

$$\int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{\left(x^2+a^2\right)^2}dx=\frac{1}{a^2}\int_{\alpha}^{\beta}\frac{a^2}{\left(x^2+a^2\right)^2}dx=\frac{1}{a^2}\int_{\alpha}^{\beta}\frac{\left(a^2+x^2\right)-x^2}{\left(x^2+a^2\right)^2}dx=$$

$$=\frac{1}{a^2}\int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{x^2+a^2}dx-\frac{1}{a^2}\int_{\alpha}^{\beta}\frac{x^2}{\left(x^2+a^2\right)^2}dx=\frac{1}{a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\Big|_{\alpha}^{\beta}-\frac{1}{a^2}\int_{\alpha}^{\beta}\frac{x^2}{\left(x^2+a^2\right)^2}dx.\quad (*)$$

Ultima integrală se calculează folosind metoda integrării prin părți și se obține:

$$\int_{\alpha}^{\beta}\frac{x^2}{\left(x^2+a^2\right)^2}dx=\int_{\alpha}^{\beta}x\cdot\frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^2}dx\overset{\text{III.2.a)}}{=}\int_{\alpha}^{\beta}x\cdot\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+a^2}\right)'dx=$$

$$=-\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{x^2+a^2}\Big|_{\alpha}^{\beta}+\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{x^2+a^2}dx=-\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{x^2+a^2}\Big|_{\alpha}^{\beta}+\frac{1}{2a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\Big|_{\alpha}^{\beta}$$

Înlocuind în egalitatea (*) se obține:

$$\int_{\alpha}^{\beta}\frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^2}=\frac{1}{2a^2}\left(\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+\frac{x}{x^2+a^2}\right)\Big|_{\alpha}^{\beta},\quad (4).$$

**c)** Dacă A ≠ 0 și B ≠ 0, calculul acestei integrale se reduce la calculul a două integrale de tipurile prezentate mai sus.

Avem: $\int_{\alpha}^{\beta}\frac{Ax+B}{\left(x^2+a^2\right)^2}dx=A\int_{\alpha}^{\beta}\frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^2}dx+B\int_{\alpha}^{\beta}\frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^2}.$ (5)

## *Exercițiu rezolvat*

☒ Să se calculeze următoarele integrale de funcții raționale simple:

**a)** $I_1 = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{x}{(x^2+1)^2}dx$; **b)** $I_2 = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{(x^2+1)^2}dx$; **c)** $I_3 = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{5x-2}{(x^2+1)^2}dx.$

<u>*Soluție*</u>

**a)** Integrala $I_1$ este de tipul III.2.a) și ca urmare se va calcula aplicând metoda schimbării de variabilă. Se obține:

$$I_1 = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{x}{(x^2+1)^2}dx = \frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{3}} \frac{2x}{(x^2+1)^2}dx = \frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{3}} \frac{(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{3}} \frac{u'(x)}{u^2(x)}dx = \frac{1}{2}\int_{u(1)}^{u(\sqrt{3})} \frac{1}{t^2}dt = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t}\Big|_2^4 = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}.$$

**b)** Integrala $I_2$ este de tipul III.2.b). Pentru a calcula această integrală se va aplica algoritmul descris la acest tip de integrală.

Avem succesiv:

$$I_2 = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{(x^2+1)^2}dx = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{(1+x^2)-x^2}{(x^2+1)^2}dx = \int_1^{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{x^2+1} - \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\right)dx =$$

$$= \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2+1}dx - \int_1^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{(x^2+1)^2}dx = \operatorname{arctg} x\,\Big|_1^{\sqrt{3}} - J = \operatorname{arctg}\sqrt{3} - \operatorname{arctg} 1 - J =$$

$$= \frac{\pi}{12} - J.$$

Integrala J se calculează folosind metoda integrării prin părți obținându-se succesiv:

$$J = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{(x^2+1)^2}dx = \int_1^{\sqrt{3}} x\cdot\frac{x}{(x^2+1)^2}dx = \int_1^{\sqrt{3}} x\cdot\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+1}\right)'dx =$$

$$= -\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{x^2+1}\Bigg|_1^{\sqrt{3}} + \frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2+1}dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x\,\Bigg|_1^{\sqrt{3}} = \frac{2-\sqrt{3}}{8} + \frac{\pi}{24}.$$

> ❑ **TEMĂ**
> **Să se calculeze integrala $I_2$ aplicând formula (4).**

Rezultă că $I_2 = \frac{\pi}{12} - J = \frac{\pi}{12} - \left(\frac{2-\sqrt{3}}{8} + \frac{\pi}{24}\right) = \frac{\pi}{24} + \frac{\sqrt{3}-2}{8}.$

**c)** Integrala $I_3$ se scrie ca o sumă de integrale astfel:

$$I_3 = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{5x-2}{\left(x^2+1\right)^2}dx = 5\int_1^{\sqrt{3}} \frac{x}{\left(x^2+1\right)^2}dx - 2\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{\left(x^2+1\right)^2}dx.$$

Se observă că $I_3 = 5I_1 - 2I_2$.

Înlocuind cu rezultatele obținute la a) și b) se obține:

$$I_3 = 5\cdot\frac{1}{8} - 2\left(\frac{\pi}{24} - \frac{1}{8}\right) = \frac{21-2\pi}{24}.$$

## 3. Integrale de forma $\int_\alpha^\beta \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx$, $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, $a\cdot c \neq 0$

**a)** Dacă $A = 0$, $B = 1$, se obține integrala de tipul $\int_\alpha^\beta \frac{1}{ax^2+bx+c}dx$, $\Delta = b^2 - 4ac < 0$.

Pentru calculul acestei integrale, se scrie expresia $ax^2+bx+c$ sub forma canonică, anume $ax^2+bx+c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a}$ și apoi se aplică metoda de integrare prin schimbare de variabilă. Se obține succesiv:

$$\int_\alpha^\beta \frac{1}{ax^2+bx+c}dx = \int_\alpha^\beta \frac{1}{a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a}}dx = \frac{1}{a}\int_\alpha^\beta \frac{1}{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{-\Delta}{4a^2}}\right)^2}dx =$$

$$= \frac{1}{a}\int_\alpha^\beta \frac{u'(x)}{u^2(x)+k^2}dx = \frac{1}{a}\int_{u(\alpha)}^{u(\beta)} \frac{1}{t^2+k^2}dt = \frac{1}{a\cdot k}\operatorname{arctg}\frac{t}{k}\Bigg|_{u(\alpha)}^{u(\beta)}.$$

(S-a notat $k^2 = \left(\sqrt{\frac{-\Delta}{4a^2}}\right)^2$ și $u(x) = x + \frac{b}{2a}$, $x \in [\alpha, \beta]$.)

### *Exercițiu rezolvat*

☒ Să se calculeze integralele:

$$I = \int_0^1 \frac{1}{x^2+x+1}dx; \qquad J = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{4x^2-4x+2}dx.$$

<u>*Soluție*</u>

• Pentru trinomul $x^2+x+1$ se observă că $\Delta = -3 < 0$, caz în care acesta se scrie sub forma canonică $x^2+x+1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$.

Integrala se scrie:

$$I=\int_0^1 \frac{1}{x^2+x+1}dx=\int_0^1 \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx=\int_0^1 \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}dx.$$

Aplicând metoda schimbării de variabilă, notând $u(x)=x+\frac{1}{2}$, $x\in[0, 1]$ se obține:

$$I=\int_0^1 \frac{u'(x)}{u^2(x)+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\int_{u(0)}^{u(1)} \frac{1}{t^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}dt=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{1}{t^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}dt=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t}{\sqrt{3}}\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi\sqrt{3}}{9}.$$

• Numitorul funcției de integrat are $\Delta=-16$ și forma canonică $4x^2-4x+2=4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+1$. În acest caz integrala se scrie succesiv:

$$J=\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{4x^2-4x+2}dx=\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+1}=\frac{1}{4}\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}dx.$$

Alegând $u(x)=x-\frac{1}{2}$, $x\in\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, cu $u'(x)=1$, $x\in\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ și aplicând metoda schimbării de variabilă, integrala devine:

$$J=\frac{1}{4}\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{u'(x)}{u^2(x)+\left(\frac{1}{2}\right)^2}dx=\frac{1}{4}\int_{u\left(\frac{1}{2}\right)}^{u(1)} \frac{1}{t^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}dt=\frac{1}{4}\cdot 2\operatorname{arctg}2t\Bigg|_0^{\frac{1}{2}}=\frac{\pi}{8}.$$

**b)** Dacă $A=1$ și $B-0$ se obține integrala de tipul $\int_\alpha^\beta \frac{x}{ax^2+bx+c}dx$, $\Delta=b^2-4ac<0$.

Pentru calculul integralei se folosește metoda schimbării de variabilă luând $u(x)=ax^2+bx+c$, cu $u'(x)=2ax+b$, $x\in[\alpha, \beta]$.

Calculele decurg astfel:

$$\int_\alpha^\beta \frac{x}{ax^2+bx+c}dx=\frac{1}{2a}\int_\alpha^\beta \frac{2ax}{ax^2+bx+c}dx=\frac{1}{2a}\int_\alpha^\beta \frac{(2ax+b)-b}{ax^2+bx+c}dx=$$

$$=\frac{1}{2a}\int_{\alpha}^{\beta}\frac{u'(x)}{u(x)}dx-\frac{b}{2a}\int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{ax^2+bx+c}dx=\frac{1}{2a}\int_{u(\alpha)}^{u(\beta)}\frac{1}{t}dt-\frac{b}{2a}\int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{ax^2+bx+c}dx=$$

$$=\frac{1}{2a}\ln t\Big|_{u(\alpha)}^{u(\beta)}-\frac{b}{2a}\int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{ax^2+bx+c}dx.$$

Ultima integrală obținută este de tipul III. 3. a) tratat anterior.

**c)** Dacă $A\neq 0, B\neq 0,$ atunci integrala se desparte în sumă de două integrale de tipul celor întâlnite anterior.

Astfel, $\int_{\alpha}^{\beta}\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx=A\int_{\alpha}^{\beta}\frac{x}{ax^2+bx+c}dx+B\int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{ax^2+bx+c}dx.$

## *Exercițiu rezolvat*

☒ Fie funcția $f:[0,1]\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x+1}{3x^2-6x+4}.$

**a)** Să se scrie sub forma canonică expresia $3x^2-6x+4.$

**b)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx.$

<u>*Soluție*</u>

**a)** Pentru expresia $3x^2-6x+4,\ \Delta=36-48=-12.$

Rezultă că $3x^2-6x+4=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{-\Delta}{4a}=3(x-1)^2+1.$

**b)** Avem:

$$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\frac{x+1}{3x^2-6x+4}dx=\int_0^1\frac{x}{3x^2-6x+4}dx+\int_0^1\frac{1}{3x^2-6x+4}dx=$$

$$=\frac{1}{6}\int_0^1\frac{6x}{3x^2-6x+4}dx+\int_0^1\frac{1}{3x^2-6x+4}dx=\frac{1}{6}\int_0^1\frac{\left(3x^2-6x+4\right)'}{\left(3x^2-6x+4\right)}dx+$$

$$+2\int_0^1\frac{1}{3x^2-6x+4}dx=\frac{1}{6}\int_0^1\frac{u'(x)}{u(x)}dx+\frac{2}{3}\int_0^1\frac{1}{(x-1)^2+\frac{1}{3}}dx=\frac{1}{6}\cdot\ln t\Big|_4^1+$$

$$+\frac{2}{3}\cdot\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}(x-1)\sqrt{3}\Big|_0^1=-\frac{1}{6}\ln 4+\frac{2\sqrt{3}}{9}\pi.$$

**4. Integrale de forma:**

$$\int_{\alpha}^{\beta}\frac{\mathbf{Ax+B}}{\left(\mathbf{ax^2+bx+c}\right)^2}\mathbf{dx},\ \Delta=\mathbf{b^2-4ac<0,\ a\cdot c\neq 0}$$

Dacă $ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{-\Delta}{4a^2}\right]$ și $u(x)=x+\frac{b}{2a},\ x\in[\alpha,\beta]$,

integrala se transformă astfel:

$$\int_{\alpha}^{\beta}\frac{Ax+B}{a^2\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{-\Delta}{4a^2}\right]^2}dx=\frac{1}{a^2}\int_{\alpha}^{\beta}\frac{A\left(x+\frac{b}{2a}\right)-\frac{Ab}{2a}+B}{\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{-\Delta}{4a^2}\right]^2}dx=$$

$$=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{\left(Cu(x)+D\right)u'(x)}{\left(u^2(x)+k^2\right)^2}dx=\int_{u(\alpha)}^{u(\beta)}\frac{Ct+D}{\left(t^2+k^2\right)^2}dt,\text{ unde } C=\frac{A}{a^2},\ D=\frac{1}{a^2}\left(-\frac{Ab}{2a}+B\right)$$

și $k^2=\frac{-\Delta}{4a^2}$.

Așadar, calculul acestei integrale s-a redus la calculul unei integrale de tipul III. 2.

## *Exercițiu rezolvat*

☒ Să se calculeze integrala $\int_{-2}^{0}\frac{2x+3}{\left(x^2+4x+8\right)^2}dx$.

<u>*Soluție*</u>

Numitorul se scrie sub forma $x^2+4x+8=(x+2)^2+4$, iar integrala se scrie succesiv sub forma:

$$I=\int_{-2}^{0}\frac{2x+3}{\left[(x+2)^2+4\right]^2}dx=\int_{-2}^{0}\frac{2(x+2)-1}{\left[(x+2)^2+4\right]^2}dx=\int_{-2}^{0}\frac{2u(x)-1}{\left[u^2(x)+4\right]^2}\cdot u'(x)dx=$$

$$=\int_{u(-2)}^{u(0)}\frac{2t-1}{\left(t^2+4\right)^2}dt=\int_{0}^{2}\frac{2t}{\left(t^2+4\right)^2}dt-\int_{0}^{2}\frac{1}{\left(t^2+4\right)^2}dt=I_1-I_2.$$

Integralele $I_1$ și $I_2$ sunt de tipul III.2. Se obține:

$$I_1=\int_{0}^{2}\frac{2t}{\left(t^2+4\right)^2}dt=\int_{0}^{2}\frac{\left(t^2+4\right)'}{\left(t^2+4\right)^2}dt=\int_{0}^{2}\frac{v'(t)}{v^2(t)}dt=\int_{v(0)}^{v(2)}\frac{1}{y^2}dy=$$

$$=-\frac{1}{y}\Big|_4^8=-\frac{1}{8}+\frac{1}{4}=\frac{1}{8};\ \left(v(t)=t^2+4\right).$$

$$I_2=\int_0^2\frac{1}{\left(t^2+4\right)^2}dt=\frac{1}{4}\int_0^2\frac{4}{\left(t^2+4\right)^2}dt=\frac{1}{4}\int_0^2\frac{\left(4+t^2\right)-t^2}{\left(t^2+4\right)^2}dt=$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^2\frac{1}{t^2+4}dt-\frac{1}{4}\int_0^2\frac{t^2}{\left(t^2+4\right)^2}dt=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{2}\Big|_0^2-\frac{1}{4}\int_0^2 t\cdot\left(\frac{-1}{2\left(t^2+4\right)}\right)'dt=$$

$$=\frac{1}{8}\cdot\frac{\pi}{4}-\frac{1}{4}\left(\frac{-t}{2\left(t^2+4\right)}\Big|_0^2+\frac{1}{2}\int_0^2\frac{1}{t^2+4}dt\right)=\frac{\pi}{32}-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{2}\Big|_0^2\right)=$$

$$=\frac{\pi}{32}-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{8}+\frac{\pi}{16}\right)=\frac{\pi}{64}+\frac{1}{32}.$$

În final se obține că $I=I_1+I_2=\frac{6-\pi}{64}$.

## EXERCIȚII ȘI PROBLEME

### EXERSARE

**Să se calculeze următoarele integrale de funcții raționale simple:**

**E1.** a) $\int_{-1}^{2}\left(4x^3-6x^2+8x-3\right)dx$;

b) $\int_{-1}^{1}\left[\left(x^2-3\right)^2+9x^4\right]dx$;

c) $\int_0^1\left(4mx^3+2px+1\right)dx$;

d) $\int_1^2(3x-1)(4x+3)\,dx$.

**E2.** a) $\int_{e+3}^{8}\frac{1}{x-3}dx$;

b) $\int_1^3\frac{1}{x+5}dx$;

c) $\int_2^3\frac{1}{3x-12}dx$;

d) $\int_{-\frac{1}{4}}^{\frac{5}{4}}\frac{1}{4x+3}dx$;

e) $\int_{-2}^{4}\frac{1}{6-x}dx$;

f) $\int_{-\frac{1}{4}}^{\frac{1}{4}}\frac{1}{3-8x}dx$;

g) $\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{6}-x\sqrt{2}}dx$.

**E3.** a) $\int_{-2}^{1}\frac{1}{(x-2)^2}dx$;

b) $\int_{-3}^{-2}\frac{1}{(x+1)^4}dx$;

c) $\int_{-1}^{3}\frac{1}{(2x+4)^2}dx$;

d) $\int_{-1}^{1}\frac{24}{(2x+6)^3}dx$;

e) $\int_{-1}^{0}\frac{16}{(-2x+1)^3}dx$;

f) $\int_{-2}^{1}\frac{6}{\left(\sqrt[3]{3x}-\sqrt[3]{24}\right)^3}dx$.

**E4.** a) $\int_{4\sqrt{3}}^{8} \frac{1}{x^2+64}dx$;

b) $\int_{1}^{3} \frac{1}{x^2+3}dx$;

c) $\int_{0}^{2\sqrt{3}} \frac{1}{4x^2+16}dx$;

d) $\int_{-3}^{0} \frac{4}{-18-2x^2}dx$;

e) $\int_{-\sqrt{2}}^{0} \frac{4\sqrt{6}}{\sqrt{24}x^2+4\sqrt{6}}dx$;

f) $\int_{-\sqrt{2}-1}^{1} \frac{1+\sqrt{2}}{x^2+\left(3+2\sqrt{2}\right)}dx$.

**E5.** a) $\int_{-1}^{\sqrt{3}} \frac{1}{\left(x^2+1\right)^2}dx$;

b) $\int_{0}^{2} \frac{1}{\left(x^2+4\right)^2}dx$;

c) $\int_{-5}^{5} \frac{5}{\left(3x^2+75\right)^2}dx$;

d) $\int_{-\sqrt{2}}^{0} \frac{8}{\left(\sqrt{8}+\sqrt{2}x^2\right)^2}dx$.

**E6.** a) $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2+x+1}dx$;

b) $\int_{-3}^{-1} \frac{1}{x^2+4x+5}dx$;

c) $\int_{2}^{4} \frac{dx}{x^2-6x+10}$;

d) $\int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \frac{dx}{4x^2+4x+2}$;

e) $\int_{0}^{\frac{2}{3}} \frac{dx}{9x^2-12x+8}$;

f) $\int_{0}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2-2\sqrt{3}x+12}$;

g) $\int_{2}^{5} \frac{dx}{10x-x^2-34}$;

h) $\int_{0}^{\sqrt{6}} \frac{dx}{\sqrt{24}x-\left(8+x^2\right)}$.

**E7. Să se calculeze:**

a) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\sqrt{3}-1} \frac{dx}{\left(x^2+x+1\right)^2}$;

b) $\int_{-4}^{-2} \frac{dx}{\left(x^2+6x+10\right)^2}$;

c) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{\left(x^2-4x+5\right)^2}$;

d) $\int_{\sqrt{3}-2}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\left(x^2-2\sqrt{3}x+7\right)^2}$.

**E8. Să se studieze dacă următoarele egalități sunt adevărate:**

a) $\int_{0}^{1} \frac{x}{x^2+x+1}dx = \ln\sqrt{3} - \frac{\left(2-\sqrt{3}\right)\pi}{18}$;

b) $\int_{3}^{5} \frac{2x}{x^2-8x+17}dx = 4\pi$;

c) $\int_{-1}^{1} \frac{2x+3}{\left(x^2+2x+5\right)^2}dx = \frac{\pi+10}{64}$;

d) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{4x-1}{\left(4x^2-4x+5\right)^2}dx = \frac{-3}{20}+\frac{\pi-2}{128}$.

## 9.2. Calculul integralei unei funcții raționale oarecare

În mulțimea $\mathbb{R}[X]$ a polinoamelor cu coeficienți reali, singurele polinoame ireductibile peste $\mathbb{R}$ sunt polinoamele de forma $(X-a)$ și $\left(X^2+bX+c\right)$, $a, b, c \in \mathbb{R}$ și $b^2-4c<0$.

O funcție rațională oarecare se poate scrie ca o sumă algebrică de funcții raționale simple pentru care calculul integralelor acestora a fost studiat anterior. Pentru a realiza această scriere se va utiliza următoarea teoremă:

**▣ TEOREMA 14 (de descompunere a unei funcții raționale în sumă finită de funcții raționale simple)**

Fie funcția rațională $f: I \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, unde $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, $Q(x) \neq 0, \forall\ x \in I$.

Dacă $Q(x) = (x - a_1)^{\alpha_1}(x - a_2)^{\alpha_2} \ldots (x - a_p)^{\alpha_p}(x^2 + b_1 x + c_1)^{\beta_1} \cdot$ $\cdot (x^2 + b_2 x + c_2)^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot (x^2 + b_r x + c_r)^{\beta_r}$, unde $b_k^2 - 4c_k < 0, k = \overline{1, r}$,

atunci $f(x)$ se scrie în mod unic sub forma:

$$f(x) = L(x) + \sum_{k=1}^{p}\left(\frac{A_k^{(1)}}{x - a_k} + \frac{A_k^{(2)}}{(x - a_k)^2} + \ldots + \frac{A_k^{(\alpha_k)}}{(x - a_k)^{\alpha_k}}\right) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{r}\left(\frac{B_k^{(1)}x + C_k^{(1)}}{(x^2 + b_k x + c_k)} + \frac{B_k^{(2)}x + C_k^{(2)}}{(x^2 + b_k x + c_k)^2} + \ldots + \frac{B_k^{(\beta_k)}x + C_k^{(\beta_k)}}{(x^2 + b_k x + c_k)^{\beta_k}}\right),$$

unde L este funcție polinomială.

**Mod practic de aplicare a teoremei**

Pentru descompunerea unei funcții raționale în sumă finită de funcții raționale simple se procedează astfel:

**a)** Se efectuează împărțirea cu rest a polinoamelor P, Q, dacă $\text{grad}\,P \geq \text{grad}\,Q$, rezultând relația $P = L \cdot Q + R$, $0 \leq \text{grad}\,R < \text{grad}\,Q$ și $f(x) = L(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$.

**b)** Pentru $\frac{R(x)}{Q(x)}$ se folosește formula de descompunere în sumă finită de funcții raționale simple conform teoremei anterioare, unde coeficienții $A_k^{(i)}, B_k^{(i)}, C_k^{(i)}$ urmează a fi determinați.

**ISTORIC**

LEIBNIZ și Johann BERNOULLI au inițiat în 1702 metoda integrării funcțiilor raționale prin descompunerea în sumă finită de funcții raționale simple (cazul rădăcinilor reale sau complexe simple).

Leonhard EULER a completat metoda în cazul rădăcinilor complexe multiple (1748).

**c)** În egalitatea obținută la punctul b) se elimină numitorul comun $Q(x)$ și se ajunge la o egalitate de funcții polinomiale.

**d)** Din egalitatea funcțiilor polinomiale se obține un sistem de ecuații în care necunoscutele sunt coeficienții $A_k^{(i)}, B_k^{(i)}, C_k^{(i)}$.

Metoda de determinare a coeficienților $A_k^{(i)}, B_k^{(i)}, C_k^{(i)}$ se numește **metoda coeficienților nedeterminați**.

Vom exemplifica utilizarea acestei teoreme în calculul integralei unei funcții raționale pentru diferite funcții raționale $f:[a, b] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, $Q(x) \neq 0$, pentru $x \in [a, b]$, $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ și $\text{grad}\, Q \leq 4$, distingând între diferite moduri de descompunere a numitorului $Q(x)$ în produs de factori ireductibili.

### 1. Numitorul are rădăcini reale simple.

☞ ***Exemplu***

◆ Să se calculeze următoarele integrale:

**a)** $I = \int_{-2}^{1} \frac{9x+2}{x^2+x-6}\,dx$; **b)** $J = \int_{1}^{2} \frac{2x^3+3x^2-4x+2}{x^2+2x}\,dx$.

<u>Soluție</u>

**a)** Considerăm funcția rațională $f:[-2, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{9x+2}{x^2+x-6}$.

Expresia $x^2+x-6$ are următoarea descompunere în produs de factori ireductibili peste $\mathbb{R}$: $x^2+x-6 = (x-2)(x+3)$.

Conform teoremei 14, funcția f are următoarea scriere ca sumă de funcții raționale simple:

$f(x) = \frac{9x+2}{x^2+x-6} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+3}$, $x \in [-2, 1]$, (1).

Se elimină numitorul comun și se obține egalitatea de funcții:

$9x+2 = x(A+B)+3A-2B$, $x \in [-2, 1]$, (2).

Identificând coeficienții expresiilor polinomiale din egalitatea (2) se obține sistemul de ecuații:

$A+B=9$, $3A-2B=2$ cu soluția $A=4$, $B=5$.

Așadar, relația (1) devine: $f(x) = \frac{4}{x-2} + \frac{5}{x+3}$, $x \in [-2, 1]$.

Rezultă că $I = \int_{-2}^{1} \left( \frac{4}{x-2} + \frac{5}{x+3} \right) dx = \left(4\ln|x-2| + 5\ln|x+3|\right)\Big|_{-2}^{1} = \ln 4$.

➲ <u>**OBSERVAȚIE**</u>

Cu această rezolvare s-a răspuns la situația-problemă formulată la începutul paragrafului 9.

**b)** Considerăm funcția rațională $f:[1, 2]\to \mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{2x^3+3x^2-4x+2}{x^2+2x}$. Se observă că gradul numărătorului este mai mare decât gradul numitorului. Aplicând algoritmul de împărțire a două polinoame și teorema împărțirii cu rest a polinoamelor, se obține că $2x^3+3x^2-4x+2=(2x-1)\left(x^2+2x\right)+(-2x+2)$.

Rezultă că $f(x)=\dfrac{(2x-1)\left(x^2+2x\right)+(-2x+2)}{x^2+2x}=2x-1+\dfrac{-2x+2}{x^2+2x}$.

Rămâne de scris ca sumă de funcții raționale simple funcția:

$g:[1, 2]\to \mathbb{R},\ g(x)=\dfrac{-2x+2}{x^2+2x}$.

Avem: $\dfrac{-2x+2}{x^2+2x}=\dfrac{-2x+2}{x(x+2)}$.

Conform teoremei 14 se obține $\dfrac{-2x+2}{x(x+2)}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x+2},\ x\in[1, 2]$.

Eliminând numitorul se obține egalitatea de funcții polinomiale:

$-2x+2=x(A+B)+2A,\ \forall\ x\in[1, 2]$.

Identificând coeficienții celor două expresii polinomiale se obține sistemul de ecuații: $A+B=-2,\ 2A=2$ cu soluția $A=1$ și $B=-3$.

Așadar, $g(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{3}{x+2},\ \forall\ x\in[1, 2]$ și $f(x)=2x-1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{3}{x+2},\ x\in[1, 2]$.

Rezultă că $J=\int_1^2\left(2x-1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{3}{x+2}\right)dx=\left(x^2-x+\ln|x|-3\ln|x+2|\right)\Big|_1^2=$

$=2+\ln 2+3\cdot\ln\dfrac{3}{4}=2+\ln\dfrac{27}{32}$.

## 2. Numitorul are rădăcini reale multiple.

☞ ***Exemplu***

◆ Să se calculeze integrala $I=\int_{-1}^{-\frac{1}{2}}\dfrac{3-2x}{x^2(x-1)^2}dx$.

*Soluție*

Se consideră funcția $f:\left[-1, -\dfrac{1}{2}\right]\to \mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{3-2x}{x^2(x-1)^2}$.

Aplicând teorema 14, expresia funcției f se scrie astfel:

$\dfrac{3-2x}{x^2(x-1)^2}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x^2}+\dfrac{C}{x-1}+\dfrac{D}{(x-1)^2},\ x\in\left[-1, -\dfrac{1}{2}\right]$.

Eliminând numitorul comun se obține egalitatea:

$3-2x=Ax(x-1)^2+B(x-1)^2+Cx^2(x-1)+Dx^2,\ x\in\left[-1, -\dfrac{1}{2}\right]$ (1) sau

$3-2x=(A+C)x^3+(-2A+B-C+D)x^2+(A-2B)x+B,\ x\in\left[-1, -\dfrac{1}{2}\right]$, (2).

Identificând coeficienții acelorași puteri ale lui x din cei doi membri ai egalității (2), se obține sistemul de ecuații: $A+C=0$, $-2A+B-C+D=0$, $A-2B=-2$, $B=3$, cu soluția $A=4$, $B=3$, $C=-4$, $D=1$.

Așadar, $\dfrac{3-2x}{x^2(x-1)^2}=\dfrac{4}{x}+\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{4}{x-1}+\dfrac{1}{(x-1)^2}$, $x\in\left[-1,-\dfrac{1}{2}\right]$.

Rezultă că: $I=\int_{-1}^{-\frac{1}{2}}\left(\dfrac{4}{x}+\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{4}{x-1}+\dfrac{1}{(x-1)^2}\right)dx=\left(4\ln|x|-\dfrac{3}{x}-4\ln|x-1|-\dfrac{1}{x-1}\right)\Bigg|_{-1}^{-\frac{1}{2}}=$

$=\dfrac{19}{6}-4\ln\dfrac{3}{2}$.

### ➲ OBSERVAȚIE

Constantele A, B, C, D din egalitatea (1) se mai pot determina astfel:

- Pentru $x=0$ se obține $B=3$ și pentru $x=1$ se obține $D=1$.
- Pentru determinarea constantelor A și C se derivează egalitatea (1) și se obține:

  $-2=A\left(3x^2-4x+1\right)+2B(x-1)+C\left(3x^2-2x\right)+2Dx.$

  Din această egalitate, pentru $x=0$ se obține $A=4$, iar pentru $x=1$ se obține $C=-4$.

### 3. Numitorul are rădăcini complexe simple.

☞ ***Exemplu***

◆ Să se determine integrala funcției $f:[-1,0]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{16}{x^4+4}$.

*Soluție*

Descompunerea în factori ireductibili peste $\mathbb{R}$ a numitorului conduce la următoarea scriere $x^4+4=x^4+4x^2+4-4x^2=\left(x^2+2\right)^2-(2x)^2=\left(x^2-2x+2\right)\left(x^2+2x+2\right)$.

Aplicăm teorema 1 și obținem următoarea descompunere în sumă finită de funcții raționale:

$$\frac{16}{x^4+4}=\frac{Ax+B}{x^2-2x+2}+\frac{Cx+D}{x^2+2x+2},\ \forall\ x\in[-1,0].$$

Aplicând metoda coeficienților nedeterminați se obține egalitatea:

$$16=(A+C)x^3+(2A+B-2C+D)x^2+(2A+2B+2C-2D)x+2B+2D,\ \ x\in[-1,0].$$

Identificând coeficienții acelorași puteri ale lui x din cei doi membri se obține sistemul de ecuații:

$A+C=0$, $2A+B-2C+D=0$, $2A+2B+2C-2D=0$, $2B+2D=16$, cu soluția $A=-2$, $B=4$, $C=2$, $D=4$.

Așadar, $f(x)=\dfrac{-2x+4}{x^2-2x+2}+\dfrac{2x+4}{x^2+2x+2}$ și $\int_{-1}^{0}f(x)dx=\int_{-1}^{0}\dfrac{-2x+4}{x^2-2x+2}dx+$

$+\int_{-1}^{0}\dfrac{2x+4}{x^2+2x+2}dx=-\int_{-1}^{0}\left(\dfrac{2x-2}{x^2-2x+2}-\dfrac{2}{x^2-2x+2}\right)dx+\int_{-1}^{0}\left(\dfrac{2x+2}{x^2+2x+2}+\right.$

$$+\frac{2}{x^2+2x+2}\Bigg)dx=-\int_{-1}^{0}\frac{\left(x^2-2x+2\right)'}{x^2-2x+2}dx+2\int_{-1}^{0}\frac{dx}{(x-1)^2+1}+\int_{-1}^{0}\frac{\left(x^2+2x+2\right)'}{x^2+2x+2}dx+$$

$$+2\int_{-1}^{0}\frac{dx}{(x+1)^2+1}=\int_{2}^{5}\frac{dt}{t}+2\int_{-2}^{-1}\frac{dt}{t^2+1}+\int_{1}^{2}\frac{dt}{t}+2\int_{0}^{1}\frac{dt}{t^2+1}=\ln t\,\Big|_2^5+2\operatorname{arctg}t\,\Big|_{-2}^{-1}+$$

$$+\ln t\,\Big|_1^2+2\operatorname{arctg}t\,\Big|_0^1=\ln 5+2\operatorname{arctg}2.$$

## 4. Numitorul are rădăcini complexe multiple.

☞ ***Exemplu***

- Să se calculeze integrala $\int_{-1}^{1}\frac{x^2-3x+2}{\left(x^2+1\right)^2}dx.$

*Soluție*

Considerăm funcția rațională $f:[-1,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{x^2-3x+2}{\left(x^2+1\right)^2}.$

Aplicând teorema 14 se obține:

$$f(x)=\frac{x^2-3x+2}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{Cx+D}{\left(x^2+1\right)^2},\ x\in[-1,1].$$

Metoda coeficienților nedeterminați conduce la următoarea egalitate:
$x^2-3x+2=(Ax+B)\left(x^2+1\right)+Cx+D,\ x\in[-1,1],$ din care se obține sistemul de ecuații: $A=0,\ B=1,\ A+C=-3,\ B+D=2$ cu soluțiile $A=0,\ B=1,\ C=-3,\ D=1$. Rezultă că f se scrie ca sumă de funcții raționale simple astfel:

$f(x)=\frac{1}{x^2+1}-\frac{3x-1}{\left(x^2+1\right)^2},\ x\in[-1,1],$ iar integrala se scrie sub forma:

$$\int_{-1}^{1}f(x)dx=\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2+1}-\int_{-1}^{1}\frac{3x-1}{\left(x^2+1\right)^2}dx=\operatorname{arctg}x\,\Big|_{-1}^{1}-I_1=\frac{\pi}{2}-I_1,\ (1).$$

Calculăm $I_1$ în felul următor:

$$I_1=\frac{3}{2}\int_{-1}^{1}\frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}dx-\int_{-1}^{1}\frac{1}{\left(x^2+1\right)^2}dx=\frac{3}{2}\int_{2}^{2}\frac{1}{t^2}dt-\int_{-1}^{1}\frac{\left(1+x^2\right)-x^2}{\left(x^2+1\right)^2}=$$

$$=0-\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\left(x^2+1\right)}+\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{\left(x^2+1\right)^2}dx=-\operatorname{arctg}x\,\Big|_{-1}^{1}+\int_{-1}^{1}x\left[\frac{-1}{2\left(x^2+1\right)}\right]'dx=$$

$$=-\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2\left(x^2+1\right)}\Bigg|_{-1}^{1}+\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2+1}=-\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x\,\Bigg|_{-1}^{1}=-\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2},\ (2).$$

Din relațiile (1) și (2) se obține că $\int_{-1}^{1}f(x)dx=\frac{3\pi}{4}+\frac{1}{2}.$

## *Aplicație în fizică*

Concentrația unei soluții apoase a unei substanțe, variază urmând legea: $C(x)=\frac{10x}{x+1}\left(g/m^3\right)$, x fiind grosimea stratului de soluție.

Care este cantitatea Q de substanță conținută într-o coloană verticală de soluție a cărei secțiune dreaptă este $S=1\ m^2$ și grosimea variind între 0 și 200 m?

<u>Soluție</u>

Considerăm un strat foarte mic al coloanei de soluție apoasă cu secțiunea S și grosimea dx, situat la adâncimea x (figura 1).

Cantitatea de substanță conținută în acest strat este: $dQ=C\cdot S\,dx=\frac{10x}{x+1}dx$. Integrând de la 0 la 200 se obține:

$$Q=10\int_0^{200}\frac{x}{x+1}dx=10\int_0^{200}\frac{(x+1)-1}{x+1}dx=$$

$$=10\left[x-\ln(x+1)\right]\Big|_0^{200}=10(200-\ln 201).$$

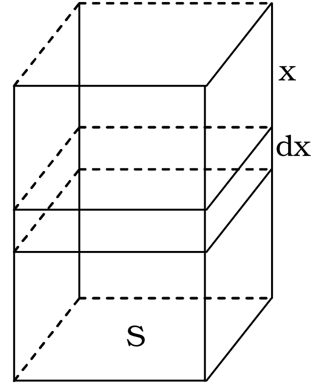



*Figura 1*

## EXERCIȚII ȘI PROBLEME

### EXERSARE

**E1. Să se calculeze integralele de funcții raționale (numitorii au rădăcini reale simple):**

a) $\int_1^2 \frac{dx}{x(x+1)}$;

b) $\int_0^1 \frac{x}{(x+1)(x+2)}dx$;

c) $\int_0^4 \frac{5x+1}{(x+2)(2x+1)}dx$;

d) $\int_2^3 \frac{x+5}{(x-1)(x+2)(x+1)}dx$;

e) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{12}{\left(x^2-1\right)\left(x^2-4\right)}dx$;

f) $\int_{-2}^0 \frac{x^3-3x^2+5x}{x^2-3x+2}dx$;

g) $\int_2^3 \frac{x^4-x^2-2}{x\left(x^2-1\right)}dx$.

**E2. Să se calculeze integralele de funcții raționale (numitorii au rădăcini reale multiple):**

a) $\int_{-2}^{-1} \frac{x}{(x-1)^2}dx$;

b) $\int_0^1 \frac{x^2}{(x-2)^3}dx$;

c) $\int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{x^2(x-1)^2}dx$;

d) $\int_1^2 \frac{2x+1}{x^2(x+1)^2}dx$;

e) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{5x^2+2x+1}{\left(x^2-1\right)^2}dx$;

f) $\int_{\frac{1}{2}}^3 \frac{x+4}{x(x+2)^2}dx$.

**E3.** **Să se calculeze integralele de funcții raționale (numitorii au rădăcini complexe simple):**

a) $\int_1^{\sqrt{e}} \frac{dx}{x\left(x^2+1\right)}$;

b) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{3}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+4\right)}dx$;

c) $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{2x}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+3\right)}dx$;

d) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2x}{x^4-1}dx$.

**E4.** **Să se calculeze integralele de funcții raționale (numitorii au rădăcini complexe multiple):**

a) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{\left(x^2+3\right)^2}dx$;

b) $\int_{-2}^0 \frac{x^2+2}{\left(x^2+4\right)^2}dx$;

c) $\int_0^{\sqrt{2}} \frac{2x^2-x+12}{\left(x^2+6\right)^2}dx$;

d) $\int_{-\frac{1}{2}}^0 \frac{1}{\left(x^2+x+1\right)^2}dx$.

## APROFUNDARE

**A1.** **Să se calculeze integralele de funcții raționale:**

a) $\int_2^3 \frac{2x^2-6}{x^3+2x^2-3x}dx$;

b) $\int_1^2 \frac{x^4+x^3+2x-1}{x^3+2x^2+x}dx$;

c) $\int_0^2 \frac{x-1}{(x+1)^3}dx$.

*(Univ. Ovidius, Constanța, 1999)*

**A2.** **Să se calculeze integralele:**

a) $\int_0^1 \frac{x}{x^3+1}dx$;

*(Univ. București, 1999)*

b) $\int_1^{\sqrt{2}} \frac{x^2-2x+2}{(2x-1)\left(x^2+1\right)}dx$;

*(Univ. Babeș Bolyai, Cluj-Napoca, 1999)*

c) $\int_0^1 \frac{1}{x^3+x^2+x+1}dx$.

*(Univ. Dunărea de Jos, Galați, 1999)*

**A3.** **Fie** $I_n = \int_{n-1}^n \frac{x+4}{x^2+3x+2}dx,\ n \in \mathbb{N}^*$.

**Dacă** $\alpha = \lim_{n\to\infty}\left(n+\sqrt{n}+3\right)\cdot I_n$,

**atunci:**

a) $\alpha = 0$;  b) $\alpha = 1$;

c) $\alpha = e$;  d) $\alpha = \sqrt{e}$.

*(ASE, București, 2000)*

**A4.** **Să se calculeze integralele:**

a) $\int_3^5 \left(\frac{x+3}{x-1}\right)^3 dx$;

b) $\int_0^{\sqrt{2}} \frac{x(x+1)-5}{x^4+5x^2+6}dx$;

c) $\int_{-\sqrt{2}}^0 \frac{x^5-x^4+4x^3-6x^2+4x-9}{x^4+5x^2+6}dx$;

d) $\int_0^1 \frac{x^5+x^4+2x^3+3x^2+x+1}{x^4+2x^2+1}dx$.

**A5.** Pentru $n \in \mathbb{N}$ se consideră integrala: $I_n = \int_4^5 \frac{2x-3}{x(x-1)(x-2)(x-3)+n}dx.$

a) Să se calculeze $I_0$, $I_1$ și $I_2$.

b) Să se calculeze limitele $\lim_{n\to\infty} I_n$, respectiv $\lim_{n\to\infty} nI_n$.

**A6.** Se consideră funcția $f:[0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{(x+1)^n + (x-1)^n}{x^2+1}$, $n \in \mathbb{N}$. Să se determine n astfel încât $\int_0^1 f(x)dx \in \mathbb{Q}$.

# TESTE DE EVALUARE

## Testul 1

Să se calculeze:

**Grupa I:**

a) $\int_0^1 x\ln(x+1)dx$;

b) $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{2x-1}{\sqrt{4-x^2}}dx$;

c) $\int_1^2 \frac{x^2+x+2}{x(x^2+2x+2)}dx$.

**Grupa II:**

a) $\int_0^{\pi} x\sin(x+\pi)dx$;

b) $\int_0^{\sqrt{5}} \frac{3x+5}{\sqrt{x^2+4}}dx$;

c) $\int_3^4 \frac{x+4}{(x+1)(x^2-4)}dx$.

## Testul 2

**O1.** Fie $f:(0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ și $I_n = \int_1^n f(x)dx$, $n \geq 1$.

a) Să se calculeze $I_n$, $n \geq 1$.

b) Să se determine $a_n = \sum_{k=1}^{n} I_k$.

*(3 puncte)*

**O2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + mx^2 + +nx + p$.

a) Să se determine $m, n, p \in \mathbb{R}$ știind că funcția f admite extreme locale în $x = -1$, $x = 1$ și că $\int_{-1}^1 f(x)dx = 4$.

b) Pentru valorile determinate ale parametrilor să se calculeze $\int_2^3 \frac{1}{f(x)}dx$.

*(4 puncte)*

**O3.** Să se calculeze $\int_{-1}^1 \frac{x^2}{e^x+1}dx$.

*(ASE, București, 2002)*
*(2 puncte)*

# Testul 3

❍**1.** **Se consideră funcția** $f:\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} e^{\sin x}, & x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \\ \cos x - 2\sin x, & x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$.

**Dacă** $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) \cdot \cos x \, dx$, **atunci:**

a) $I = e - \frac{\pi}{4}$; b) $I = \frac{e + \pi - 1}{4e}$;

c) $I = \frac{1}{e} + \frac{\pi}{4} - 1$; d) $I = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{e}$.

***(ASE, București, 1999)***
***(3 puncte)***

❍**2.** **Să se calculeze:**

a) $I_k = \int_0^k \frac{1}{x^2 + 3x + 2} dx$, $k \in \mathbb{N}^*$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n \ln \frac{1}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n} I_k\right)$.

***(Univ. de Nord, Baia Mare, 1999)***
***(4 puncte)***

❍**3.** **Să se calculeze** $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \ln\left(1 + \sqrt{3}\,\text{tg}\, x\right) dx$.

***(Univ. Lucian Blaga, Sibiu, 2000)***
***(2 puncte)***

# III. APLICAȚII ALE INTEGRALEI DEFINITE

Punctul de plecare al Calculului integral îl reprezintă calculul ariilor unor suprafețe plane și calculul volumelor unor corpuri de rotație.

Încă din Antichitate, Arhimede (287-212 î.Hr.) a dat metode de calcul pentru aria segmentului de parabolă folosind aproximarea prin arii ale unor suprafețe particulare. Johannes Kepler (1561-1630) a stabilit reguli de determinare a volumului butoaielor prin descompunerea corpurilor în părți foarte mici.

Saltul deosebit în problema calculului ariilor și volumelor s-a făcut cu precădere în secolele al XVII-lea, respectiv al XVIII-lea, când Isaac Newton (1642-1727) și Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) au făcut prima fundamentare teoretică a domeniului calculului integral, aprofundată apoi de matematicienii Augustin Louis Cauchy (1789-1857) și Bernhard Riemann (1826-1866).

Henri Leon Lebesgue (1875-1941) inițiază teoria modernă a noțiunilor de integrală, lungime, arie.

## 1 Aria unei suprafețe plane

În acest paragraf se va defini noțiunea de „mulțime care are arie" și se va arăta că dacă $f:[a, b]\to\mathbb{R}_+$ este o funcție continuă, atunci subgraficul ei $\Gamma_{\mathbf{f}}=\{(\mathbf{x}, \mathbf{y})\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid \mathbf{a}\le\mathbf{x}\le\mathbf{b}, \mathbf{0}\le\mathbf{y}\le\mathbf{f}(\mathbf{x})\}$ este o mulțime care are arie, iar aria sa se va calcula cu ajutorul integralei definite.

❖ **DEFINIȚIE**

- O mulțime $E\subset\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ se numește **mulțime elementară** dacă $E=\bigcup_{i=1}^{n}D_i$, (1), unde $D_i$ sunt suprafețe dreptunghiulare cu laturile respectiv paralele cu axele de coordonate, iar oricare două suprafețe diferite $D_i$, $D_j$ au interioarele disjuncte.

Prin definiție, $\text{aria}(E)=\sum_{i=1}^{n}\text{aria}(D_i).$

➲ **OBSERVAȚII**

**1.** Reprezentarea unei mulțimi elementare sub forma (1) nu este unică.

**2.** Dacă mulțimea elementară E are două reprezentări de forma (1), adică $E=\bigcup_{i=1}^{n} D_i$, $E=\bigcup_{j=1}^{m} F_j$, atunci $\sum_{i=1}^{n}\text{aria}(D_i)=\sum_{j=1}^{m}\text{aria}(F_j)=\text{aria}(E)$.

**3.** Dacă E și F sunt mulțimi elementare, atunci $E\cup F$, $E\cap F$, $E\setminus F$ sunt mulțimi elementare.

**4.** Dacă E, F sunt mulțimi elementare disjuncte, sau care au în comun cel mult laturi ale unor suprafețe dreptunghiulare componente, atunci $\text{aria}(E\cup F)=\text{aria}(E)+\text{aria}(F)$.

**5.** Dacă E, F sunt mulțimi elementare și $E\subset F$, atunci:
$\text{aria}(E)\le\text{aria}(F)$ și $\text{aria}(F\setminus E)=\text{aria}(F)-\text{aria}(E)$.

❖ **DEFINIȚIE**

• Fie A o mulțime mărginită din plan. **Mulțimea A are arie** dacă:

**a)** există două șiruri $(E_n)$, $(F_n)$ de mulțimi elementare, astfel încât $E_n\subset A\subset F_n$, $\forall\, n\in\mathbb{N}$;

**b)** șirurile de numere reale pozitive $(\text{aria}(E_n))$ și $(\text{aria}(F_n))$ sunt convergente și $\lim\limits_{n\to\infty}\text{aria}(E_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\text{aria}(F_n)$.

În acest caz se definește aria mulțimii A, astfel:
$\text{aria}(A)=\lim\limits_{n\to\infty}\text{aria}(E_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\text{aria}(F_n)$.

➲ **OBSERVAȚII**

**1.** Definiția mulțimii mărginite A nu depinde de alegerea șirurilor de mulțimi elementare $(E_n)$ și $(F_n)$.

**2.** Dacă mulțimile A și B au arie, atunci $A\cup B$, $A\cap B$ și $A\setminus B$ au arie.

**3.** Dacă A și B au arie și $A\subset B$, atunci $\text{aria}(A)\le\text{aria}(B)$ și $\text{aria}(B\setminus A)=$
$=\text{aria}(B)-\text{aria}(A)$.

Cu aceste elemente pregătitoare se va putea arăta când o mulțime plană mărginită oarecare are arie și cum se calculează aceasta.

▣ **TEOREMA 1**

Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ o funcție continuă și pozitivă. Atunci:

**a)** mulțimea $\Gamma_f=\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\mid a\le x\le b,\ 0\le y\le f(x)\}$ are arie;

**b)** $\text{aria}(\Gamma_f)=\int_a^b f(x)\,dx$.

*Demonstrație*

Fie $(\Delta_n)$, $\Delta_n = \left(a = x_0^{(n)} < x_1^{(n)} < \ldots < x_{k_n-1}^{(n)} < x_{k_n}^{(n)} = b\right)$ un șir de diviziuni ale intervalului $[a, b]$ cu $\lim\limits_{n\to\infty} \|\Delta_n\| = 0$. Funcția f fiind continuă pe $[a, b]$ este continuă pe fiecare subinterval $\left[x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}\right]$. Conform teoremei lui Weierstrass, f este mărginită și își atinge marginile pe fiecare interval $\left[x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}\right]$, $i = \overline{1, k_n}$.

În consecință, există $u_i^{(n)}, v_i^{(n)} \in \left[x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}\right]$ astfel încât $f\left(u_i^{(n)}\right) = m_i^{(n)} = \inf\left\{f(x) \middle| x \in \left[x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}\right]\right\}$, $f\left(v_i^{(n)}\right) = M_i^{(n)} = \sup\left\{f(x) \middle| x \in \left[x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}\right]\right\}$, $i = \overline{1, k_n}$.

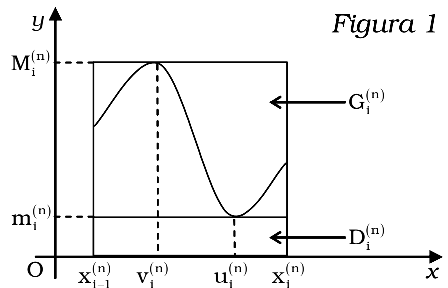


*Figura 1*

Se consideră dreptunghiurile cu baza $x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}$ și înălțimea $m_i^{(n)}$, respectiv $M_i^{(n)}$ (figura 1):

$$D_i^{(n)} = \left[x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}\right] \times \left[0, m_i^{(n)}\right];$$

$$G_i^{(n)} = \left[x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}\right] \times \left[0, M_i^{(n)}\right].$$

Se constituie mulțimile elementare $E_n \overset{def}{=} \bigcup\limits_{i=1}^{k_n} D_i^{(n)}$, respectiv $F_n \overset{def}{=} \bigcup\limits_{i=1}^{k_n} G_i^{(n)}$, care verifică relațiile $E_n \subset \Gamma_f \subset F_n$, (1), și $\text{aria}(E_n) = \sum\limits_{i=1}^{k_n} m_i^{(n)} \cdot \left(x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}\right) = \sum\limits_{i=1}^{k_n} f\left(u_i^{(n)}\right) \cdot \left(x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}\right) = \sigma_{\Delta_n}\left(f, u_i^{(n)}\right)$, respectiv $\text{aria}(F_n) = \sum\limits_{i=1}^{k_n} M_i^{(n)} \cdot \left(x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}\right) = \sum\limits_{i=1}^{k_n} f\left(v_i^{(n)}\right) \cdot \left(x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}\right) = \sigma_{\Delta_n}\left(f, v_i^{(n)}\right)$.

Fiind continuă pe $[a, b]$, f este integrabilă pe $[a, b]$ și astfel:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sigma_{\Delta_n}\left(f, u_i^{(n)}\right) = \lim_{n\to\infty} \sigma_{\Delta_n}\left(f, v_i^{(n)}\right) = \text{aria}(E_n) = \text{aria}(F_n). \quad (2)$$

Din relațiile (1) și (2) și aplicând definiția mulțimii care are arie, se obține că mulțimea $\Gamma_f$ are arie și aria $(\Gamma_f) = \int_a^b f(x)\,dx$. ■

## *Exerciții rezolvate*

☒ **1.** Să se determine ariile subgraficelor funcțiilor:

**a)** $f_1:[0,1]\to\mathbb{R},\ f_1(x)=x^2+x;$ **b)** $f_2:[0,\pi]\to\mathbb{R},\ f_2(x)=\sin x;$

**c)** $f_3:[1,e]\to\mathbb{R},\ f_3(x)=\ln x;$ **d)** $f_4:[1,4]\to\mathbb{R},\ f_4(x)=\sqrt{x}.$

<u>*Soluție*</u>

Subgraficele funcțiilor vor fi reprezentate în desenele alăturate (figurile 2-5).

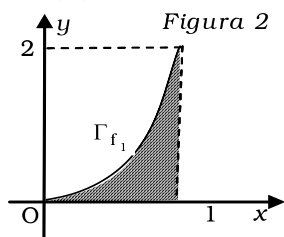



*Figura 2*

**a)** Avem: $\text{aria}\left(\Gamma_{f_1}\right)=\int_0^1 f_1(x)dx=\int_0^1\left(x^2+x\right)dx=$

$=\left(\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{6}.$

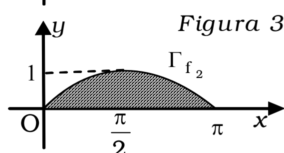



*Figura 3*

**b)** $\text{aria}\left(\Gamma_{f_2}\right)=\int_0^\pi f_2(x)dx=\int_0^\pi \sin x\,dx=-\cos x\,\Big|_0^\pi=$

$=1+1=2.$

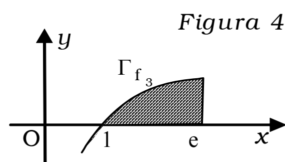



*Figura 4*

**c)** $\text{aria}\left(\Gamma_{f_3}\right)=\int_1^e f_3(x)dx=\int_1^e \ln x\,dx=$

$=\int_1^e x'\cdot\ln x\,dx=x\ln x\,\Big|_1^e-\int_1^e x\cdot\dfrac{1}{x}\,dx=e-x\big|_1^e=1.$

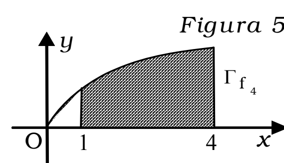



*Figura 5*

**d)** $\text{aria}\left(\Gamma_{f_4}\right)=\int_1^4 f_4(x)dx=\int_1^4\sqrt{x}\,dx=\int_1^4 x^{\frac{1}{2}}dx=$

$=\dfrac{2}{3}\cdot x^{\frac{3}{2}}\Bigg|_1^4=\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}\,\Bigg|_1^4=\dfrac{2}{3}(8-1)=\dfrac{14}{3}.$

☒ **2.** Să se determine aria mulțimii $\Gamma_f$ în cazurile:

**a)** $f:[1,e]\to\mathbb{R},\ f(x)=x\ln x;$ **b)** $f:[-1,2]\to\mathbb{R},\ f(x)=\left|x^2-x\right|.$

<u>*Soluție*</u>

**a)** Funcția f este continuă și pozitivă pe $[1,e]$. Rezultă că mulțimea $\Gamma_f$ are arie și $\text{aria}\left(\Gamma_f\right)=\int_1^e x\ln x\,dx=\dfrac{x^2}{2}\left(\ln x-\dfrac{1}{2}\right)\Bigg|_1^e=\dfrac{e^2+1}{4}.$

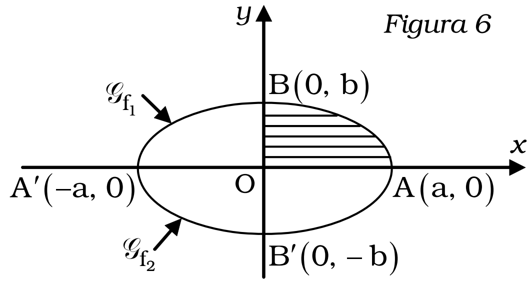
**b)** $f(x)=\begin{cases}x^2-x,\ x\in[-1,0]\\ x-x^2,\ x\in(0,1)\\ x^2-x,\ x\in[1,2]\end{cases}$. Funcția f este continuă și pozitivă pe intervalul $[-1,2]$. Rezultă că mulțimea $\Gamma_f$ are arie și:

$$\text{aria}(\Gamma_f)=\int_{-1}^{2}f(x)\,dx=\int_{-1}^{0}(x^2-x)\,dx+\int_{0}^{1}(x-x^2)\,dx+\int_{1}^{2}(x^2-x)\,dx=$$

$$=\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-1}^{0}+\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{0}^{1}+\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{1}^{2}=\frac{11}{6}.$$

## Aria elipsei

Fie elipsa $(\mathscr{E})$ caracterizată de ecuația $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$, reprezentată grafic în figura 6.




Problema care se pune este: determinarea ariei suprafeței delimitate de elipsa $(\mathscr{E})$ folosind integrala definită.

Funcțiile ale căror grafice descriu curba $(\mathscr{E})$ sunt următoarele:

$f_1, f_2 : [-a, a] \to \mathbb{R}$, $f_1(x)=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$,

$f_2(x)=-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$.

Deoarece funcțiile $f_1, f_2$ sunt funcții pare, rezultă că aria suprafeței delimitate de elipsa $(\mathscr{E})$ este egală cu $\text{aria}(\mathscr{E})=4A_1$, unde $A_1$ este aria suprafeței hașurate din figura 6.

Avem: $A_1=\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{b}{a}\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx.$

Folosind tema de proiect de la pagina 227, se obține:

$$A_1=\frac{b}{a}\cdot\frac{1}{2}\left[x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\arcsin\frac{x}{a}\right]\Bigg|_0^a=\frac{\pi ab}{4}.$$

Așadar, $\text{aria}(\mathscr{E})=\pi ab.$

Dacă $a=b$, elipsa $(\mathscr{E})$ devine cercul cu centrul în origine și raza $R=a=b$. Rezultă că $\text{aria}(\mathscr{C}(O, R))=\pi R^2$.

## Aria suprafețelor plane cuprinse între două curbe

### Problemă-suport

Se consideră funcțiile $f, g : [-2, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x)=x^2+1$, $g(x)=-x+3$.

**a)** Să se ilustreze domeniul plan D mărginit de curbele reprezentative ale funcțiilor f și g și de dreptele de ecuații $x=-2,\ x=1$.

**b)** Să se calculeze aria acestui domeniu.

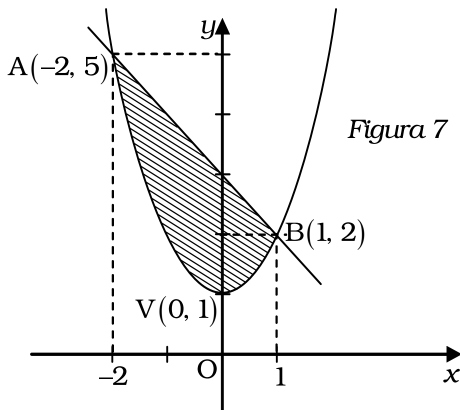


*Figura 7*

*Rezolvare*

**a)** Imaginea geometrică a graficului funcției f este arcul de parabolă AVB inclus în parabola de ecuație $y=x^2+1$, cu vârful $V(0,1)$ și care trece prin punctele $A(-2,5)$ și $B(1,2)$, (figura 7). Imaginea geometrică a graficului funcției g este segmentul de dreaptă $[AB]$, reprezentat în figura 7. Rezultă că domeniul plan D este regiunea hașurată.

**b)** Se observă că $D=\Gamma_g \setminus \Gamma_f$.

Rezultă că $\text{aria}(D)=\text{aria}(\Gamma_g)-\text{aria}(\Gamma_f)=\int_{-2}^{1} g(x)dx-\int_{-2}^{1} f(x)dx=$

$$=\int_{-2}^{1}(g(x)-f(x))dx=\int_{-2}^{1}(-x^2-x+2)dx=\left(-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+2x\right)\Bigg|_{-2}^{1}=$$

$$=\left(-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+2\right)-\left(\frac{8}{3}-\frac{4}{2}-4\right)=\frac{9}{2}.$$

Această problemă sugerează modul general de determinare a ariei unei suprafețe plane mărginite de graficele a două funcții continue pe un interval $[a,b]$.

**▣ TEOREMA 2**

Fie $f, g:[a, b]\to \mathbb{R}$ funcții continue astfel încât $f(x)\le g(x),\ \forall\ x\in[a, b]$. Atunci:

**a)** mulțimea

$\Gamma_{f,g}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid a\le x\le b,\ f(x)\le y\le g(x)\}$

cuprinsă între graficele funcțiilor f și g și dreptele de ecuații $x=a,\ x=b$ (figura 8), are arie și $\text{aria}(\Gamma_{f,g})=\int_a^b [g(x)-f(x)]dx$;

**b)** dacă $g(x)\ge f(x)\ge 0,\ \forall\ x\in[a,b]$, atunci $\text{aria}(\Gamma_{f,g})=\text{aria}(\Gamma_g)-\text{aria}(\Gamma_f)$.

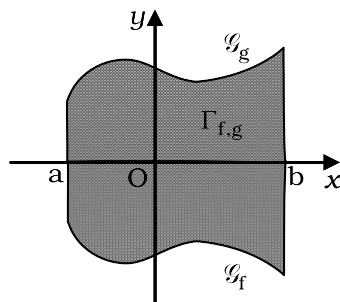


*Figura 8*

## *Probleme rezolvate*

☒ **1.** Să se determine aria suprafeței plane mărginite de graficele funcțiilor $f, g : [-1, 1] \to \mathbb{R},\ f(x) = 2^x,\ g(x) = 4 - x^2$.

<u>*Soluție*</u>

Reprezentările geometrice ale graficelor celor două funcții sunt redate în figura 9. Astfel:

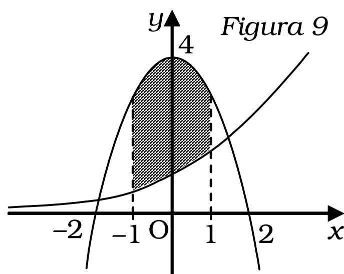


*Figura 9*

$$\text{aria}\left(\Gamma_{f,g}\right) = \int_{-1}^{1}\left[g(x) - f(x)\right]dx =$$

$$= \int_{-1}^{1}\left(4 - x^2 - 2^x\right)dx = \left(4x - \frac{x^3}{3} - \frac{2^x}{\ln 2}\right)\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{22}{3} - \frac{3}{\ln 4}.$$

☒ **2.** Să se determine aria suprafeței plane mărginite de curbele de ecuații $y = x^2 - 3x$ și $y = 2x - 4$.

<u>*Soluție*</u>

Se determină mai întâi punctele de intersecție ale celor două curbe rezolvând sistemul de ecuații $\begin{cases} y = x^2 - 3x \\ y = 2x - 4 \end{cases}$.

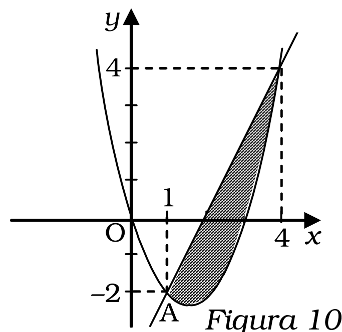


*Figura 10*

Se obțin soluțiile $(1, -2)$ și $(4, 4)$ care sunt coordonatele punctelor de intersecție ale celor două curbe, figura 10. Asociem acestor curbe funcțiile $f, g : [1, 4] \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 - 3x,\ g(x) = 2x - 4$.

Din lectura grafică se observă că $g(x) \geq f(x),\ \forall\ x \in [1, 4]$.

Rezultă că $\text{aria}\left(\Gamma_{f,g}\right) = \int_1^4\left[g(x) - f(x)\right]dx = \int_1^4\left(-x^2 + 5x - 4\right)dx =$

$$= \left(\frac{-x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - 4x\right)\Bigg|_1^4 = \frac{9}{2}.$$

☒ **3.** Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$.

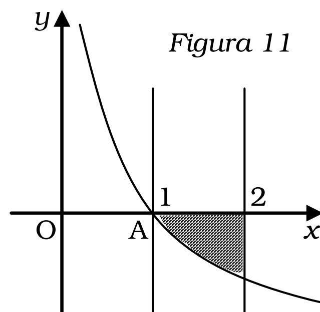
**a)** Să se reprezinte grafic funcția f.

**b)** Să se determine aria domeniului plan mărginit de axa Ox, graficul funcției și dreptele de ecuații $x = 1,\ x = 2$.

<u>*Soluție*</u>

**a)** Funcția f este strict descrescătoare pe $(0, +\infty)$, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$. Intersecția curbei logaritmice cu axa Ox este punctul $A(1, 0)$. Curba logaritmică este redată în figura 11.

**b)** Considerăm funcția $g:[1, 2] \to \mathbb{R}$, $g(x) = 0$. Rezultă că aria domeniului plan cuprins între curbele $\mathscr{G}_g$, $\mathscr{G}_f$ și dreptele de ecuații $x = 1$, $x = 2$ este:




$$\text{aria}\left(\Gamma_{f,g}\right) = \int_1^2 \left[g(x) - f(x)\right] dx =$$

$$= \int_1^2 \left[-f(x)\right] dx = -\int_1^2 \log_{\frac{1}{2}} x \, dx = \frac{1}{\ln 2} \int_1^2 \ln x \, dx =$$

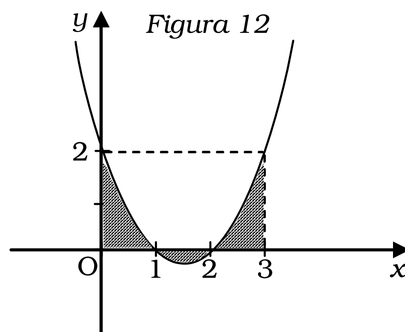
$$= \frac{1}{\ln 2} \cdot \int_1^2 x' \ln x \, dx = \frac{1}{\ln 2} \cdot \left( x \ln x \Big|_1^2 - \int_1^2 x \cdot \frac{1}{x} dx \right) = \frac{1}{\ln 2} \cdot \left( 2\ln 2 - x\Big|_1^2 \right) =$$

$$= \frac{2\ln 2 - 1}{\ln 2}.$$

☒ **4.** Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între axa Ox și imaginea geometrică a graficului funcției $f:[0, 3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 3x + 2$.

<u>*Soluție*</u>

Imaginea geometrică a graficului funcției f este redată în figura 12.




Aria suprafeței plane hașurate este:

$$\mathscr{A} = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 \left(0 - f(x)\right) dx + \int_2^3 f(x) dx =$$

$$= \int_0^1 \left(x^2 - 3x + 2\right) dx + \int_1^2 \left(-x^2 + 3x - 2\right) dx +$$

$$+ \int_2^3 \left(x^2 - 3x + 2\right) dx = \frac{5}{6} + \frac{1}{6} + \frac{5}{6} = \frac{11}{6}.$$

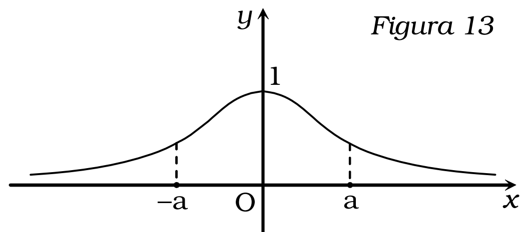
☒ **5.** O suprafață infinită

Există suprafețe plane nemărginite care pot fi vopsite cu o cantitate finită de vopsea?

<u>*Soluție*</u>

Răspunsul este afirmativ.

Într-adevăr, fie funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$ al cărei grafic este redat în figura 13.




Axa Ox este asimptotă orizontală spre $+\infty$ și $-\infty$. Pentru $a > 0$, aria subgraficului funcției f pe intervalul $[-a, a]$ este:

$$\mathscr{A}(a) = \int_{-a}^{a} \frac{1}{x^2 + 1} dx = \operatorname{arctg} x \Big|_{-a}^{a} = 2 \operatorname{arctg} a.$$

Aria suprafeței nemărginite limitate de graficul funcției și axa Ox este egală cu:

$$\mathscr{A} = \lim_{a \to +\infty} \mathscr{A}(a) = \pi.$$

Așadar, această suprafață nemărginită are arie finită.

## EXERCIȚII ȘI PROBLEME

### EXERSARE

**E1. Să se calculeze aria mulțimii $\Gamma_f$ în cazurile:**

a) $f(x) = 3x - 4,\ x \in [2, 3]$;

b) $f(x) = \sqrt{9 - x^2},\ x \in [0, 1]$;

c) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 4},\ x \in [3, 4]$;

d) $f(x) = \cos x,\ x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$;

e) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 4x + 8},\ x \in [-2, 0]$;

f) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 8x},\ x \in [1, 2]$;

g) $f(x) = xe^x,\ x \in [0, 1]$;

h) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 9}},\ x \in \left[\sqrt{10}, 5\right]$.

**E2. Să se determine aria mulțimii $\Gamma_{f,g}$ în cazurile:**

a) $f(x) = x^2,\ g(x) = 4x - 1,\ x \in [1, 3]$;

b) $f(x) = 2x - 3,\ g(x) = x^2 + 1,\ x \in \left[0, \dfrac{3}{2}\right]$;

c) $f(x) = \dfrac{1}{x^2},\ g(x) = x + 1,\ x \in [1, 3]$.

d) $f(x) = e^{-x},\ g(x) = e^x,\ x \in [0, 1]$;

e) $f(x) = -\sqrt{x + 1},\ g(x) = \sqrt{x + 1},\ x \in [0, 3]$;

f) $f(x) = 0,\ g(x) = 2\sin x,\ x \in [0, \pi]$;

g) $f(x) = \operatorname{arctg} x,\ g(x) = 0,\ x \in \left[-\sqrt{3}, -1\right]$.

**E3. Să se determine aria suprafeței din plan, delimitată de axa Ox și imaginea geometrică a graficului funcției:**

a) $f(x) = 4 - x^2,\ x \in [-2, 2]$;

b) $f(x) = x^2 + 3,\ x \in [-1, 1]$;

c) $f(x) = 9 - x^2,\ x \in [-4, 4]$;

d) $f(x) = 2x - x^2,\ x \in [-1, 3]$;

e) $f(x) = \sin x,\ x \in [0, 2\pi]$;

f) $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & x \in [-1, 0] \\ 1 - x, & x \in (0, 2] \end{cases}$.

### APROFUNDARE

**A1. Să se determine aria mulțimii $\Gamma_f$ pentru:**

a) $f(x) = x^2 \operatorname{arctg} x,\ x \in \left[0, \sqrt{3}\right]$;

b) $f(x) = x \ln^2 x,\ x \in \left[e, e^2\right]$;

c) $f(x) = \sqrt{4x - x^2},\ x \in [1, 3]$;

d) $f(x) = |x - 2|,\ x \in [-1, 4]$;

e) $f(x) = \left|x^2 - 9\right|,\ x \in [-4, 5]$;

f) $f(x) = \left|\dfrac{x - 3}{\left(x^2 - 6x + 5\right)^2}\right|,\ x \in [2, 4]$.

**A2. Să se determine aria mulțimii cuprinse între curbele:**

a) $y = x^2,\ y = 8 - x^2$;

b) $y = x^2 - 4x,\ y = x - 4;$

c) $y^2 = 16 - x^2,\ y^2 = 6x;$

d) $y^2 = 10x,\ y = 5x;$

e) $x^2 + y^2 = 4,\ y = \sqrt{3} \cdot x,\ x > 0.$

**A3.** Să se determine aria suprafeței plane mărginite de graficul funcției $f : \left[0, \frac{3\pi}{4}\right] \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{|\cos x|}{1 + \cos x}$, axa Ox și dreptele de ecuații $x = 0$, $x = \frac{3\pi}{4}$.

**A4.** Se consideră funcțiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2 + 5$ și $g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R},\ g(x) = \frac{1}{x^2}$. Să se determine aria suprafeței cuprinse între graficele celor două funcții și dreptele $x = 1,\ x = 2$.

**A5.** Fie $f : [0, 6) \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{x^2 - 4x - 12}$. Să se calculeze aria suprafeței mărginite de graficul funcției, axa Ox și dreptele $x = 4,\ x = 5$.

**A6.** Se dă funcția $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{x^2 + 6x}{x - 2}$. Să se determine aria suprafeței delimitate de graficul funcției, axa Ox și dreptele $x = -6$, $x = 0$.

**A7.** Se dă funcția $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{x^2 + x + 2}{x - 1}$. Să se determine aria suprafeței mărginite de graficul funcției, asimptota oblică și dreptele $x = 2,\ x = 3$.

**A8.** Interiorul elipsei $x^2 + 4y^2 - 4 = 0$ este despărțit de hiperbola de ecuație $x^2 - 4y^2 - 2 = 0$ în trei regiuni. Să se afle aria fiecărei regiuni.

**A9.** Se consideră funcția $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} e, & x = 0 \\ (x+1)^{\frac{1}{x}}, & x > 0 \end{cases}.$$

Să se arate că aria suprafeței delimitate de graficul funcției, axele Oy și Ox și dreapta $x = 1$ este mai mică decât „e".

**A10.** Fie $f,\ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x \operatorname{arctg} x$ și $g(x) = \ln\left(1 + x^2\right)$. Să se calculeze aria suprafeței cuprinse între graficele funcțiilor f și g și dreptele $x = 0,\ x = 1$.

**A11.** Se consideră funcția $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - x^2$. Să se determine $m \in \mathbb{R}$, astfel încât dreapta de ecuație $y = mx$ să împartă subgraficul funcției în două mulțimi de arii egale.
*(Bacalaureat, 1998)*

**A12.** Fie funcția $f : \left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right] \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{a^2 - x^2} - x,\ a \in \mathbb{R}_+^*$. Să se determine parametrul „a" astfel încât aria subgraficului funcției f să fie egală cu $\left(3\sqrt{3} + 2\pi\right)$.

**A13.** Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 + 2x + 3}$, $a \in \mathbb{R}$.

a) Să se determine valorile lui „a" astfel încât aria subgraficului funcției f pe intervalul $[a, a + 1]$ să ia valoare maximă, respectiv valoare minimă.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{a \to \infty} \frac{S(a)}{\ln a}$, unde $S(a)$ reprezintă aria suprafeței cuprinse între graficul funcției și asimptota acestuia pe intervalul $[-1, a]$.

**A14. Fie funcțiile $f, g : [2, +\infty) \to \mathbb{R}$,**

$$f(x) = \frac{x\left(1+\sqrt{x^2+1}\right)}{\sqrt{x^2+1}} \text{ și}$$

$$g(x) = \frac{x^3 - x^2 - x + 5}{(x-1)^2}.$$

**a) Să se calculeze aria $A(b)$ a suprafeței plane delimitate de graficele celor două funcții pe intervalul $[2, b]$, $b > 2$.**
**b) Să se calculeze $\lim\limits_{b\to\infty} A(b)$.**

# 2 Volumul corpurilor de rotație

Din studiul geometriei în spațiu sunt cunoscute o serie de corpuri geometrice pentru care se știu formulele de calcul ale volumului: prisma, piramida, trunchiul de piramidă, cilindrul, conul, trunchiul de con și sfera.

În acest paragraf se va indica o cale de a determina volumul acelor corpuri obținute prin rotirea subgraficului unei funcții continue și pozitive în jurul axei Ox folosind calculul integral, care pentru funcții corespunzător alese să conducă la formulele deja cunoscute pentru corpurile geometrice enumerate mai sus.

Fie $f : [a, b] \to [0, +\infty)$, o funcție continuă.

❖ **DEFINIȚIE**

• Se numește **corp de rotație determinat de funcția f**, corpul obținut prin rotirea subgraficului acesteia în jurul axei Ox, figura 1.

Corpul de rotație determinat de funcția f se notează $C_f$ și

$$C_f = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \sqrt{y^2+z^2} \le f(x),\ a \le x \le b\right\}.$$

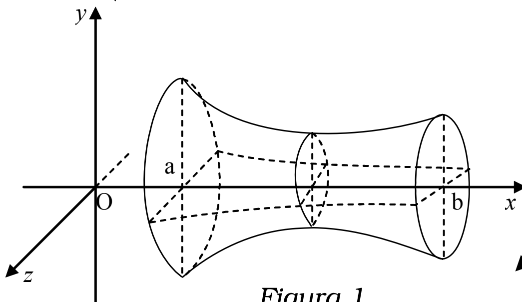


*Figura 1*

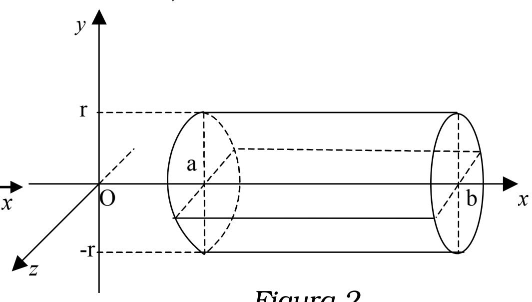


*Figura 2*

Cel mai simplu corp de rotație se obține prin rotirea subgraficului funcției constante pozitive, $f(x) = r$, $x \in [a, b]$, în jurul axei Ox, figura 2.

Acest corp reprezintă un cilindru cu raza bazei egală cu r și generatoarea (înălțimea) egală cu $b - a$.

Se notează $C_r = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \sqrt{y^2 + z^2} \le r,\ a \le x \le b\right\}$.

Se știe că volumul cilindrului $C_r$ este: $Vol(C_r) = \pi \cdot r^2 (b - a)$.

Fie funcția pozitivă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ și $\Delta = (a = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b)$ o diviziune a intervalului $[a, b]$, astfel încât f este constantă pe fiecare interval $[x_{i-1}, x_i)$, $f(x) = c_i$, $\forall\ x \in [x_{i-1}, x_i)$, $i \in \{1, 2, ..., n\}$.

Se spune că funcția f este constantă pe porțiuni.

### ❖ DEFINIȚIE

• Se numește **mulțime cilindrică elementară**, orice mulțime care se obține prin rotirea subgraficului unei funcții constante pe porțiuni în jurul axei Ox, figura 3.

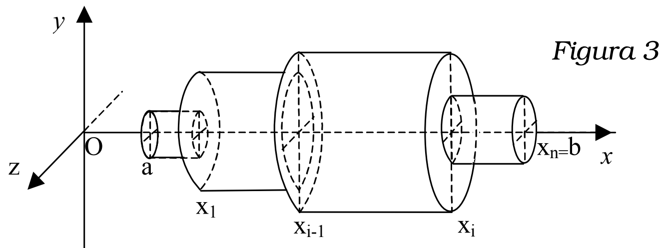


*Figura 3*

Volumul acestei mulțimi elementare este dat de formula:

$$Vol(C_f) = \pi \sum_{i=1}^{n} c_i^2 (x_i - x_{i-1}).$$

Cu ajutorul mulțimilor cilindrice elementare se va defini volumul unui corp de rotație determinat de o funcție pozitivă.

### ❖ DEFINIȚIE

• Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}_+$ și $C_f$ corpul de rotație determinat de funcția f. Corpul $C_f$ are **volum** dacă există două șiruri $(G_n)$ și $(H_n)$ de mulțimi cilindrice elementare, asociate funcțiilor constante pe porțiuni $g_n, h_n : [a, b] \to \mathbb{R}$, astfel încât:

**a)** $G_n \subset C_f \subset H_n$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$;

**b)** $\lim\limits_{n\to\infty} vol(G_n) = \lim\limits_{n\to\infty} vol(H_n) = \ell$.

În acest caz, volumul corpului $C_f$ este: $vol(C_f) \overset{def}{=} \ell$.

Cu aceste elemente pregătitoare, vom descrie o metodă oferită de calculul integral pentru determinarea volumului unui corp de rotație.

**▣ TEOREMA 3**

Fie $f:[a, b] \to \mathbb{R}_+$ o funcție continuă și $C_f$ corpul de rotație determinat de funcția f. Atunci:
**a)** corpul $C_f$ are volum;
**b)** $vol(C_f) = \pi\int_a^b f^2(x)dx.$

*Demonstrație*

Fie $(\Delta_n)$, $\Delta_n = \left(a = x_0^{(n)} < x_1^{(n)} < \ldots < x_{k_n-1}^{(n)} < x_{k_n}^{(n)} = b\right)$ un șir de diviziuni ale intervalului $[a, b]$, cu $\lim_{n\to\infty}\|\Delta_n\| = 0$. Notăm $m_i^{(n)}$, respectiv $M_i^{(n)}$ marginea inferioară, respectiv marginea superioară a funcției f pe intervalul $\left[x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}\right]$, $i = \overline{1, k_n}$. Atunci există $u_i^{(n)}, v_i^{(n)} \in \left[x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}\right]$, astfel încât $f\left(u_i^{(n)}\right) = m_i^{(n)}$, $f\left(v_i^{(n)}\right) = M_i^{(n)}$, $i = \overline{1, k_n}$.

Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$ se definesc funcțiile constante pe porțiuni:

$$g_n(x) = \begin{cases} m_i^{(n)} = f\left(u_i^{(n)}\right), & x \in \left(x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}\right), 1 \le i \le k_n \\ f\left(x_i^{(n)}\right), & x = x_i^{(n)}, 0 \le i \le k_n \end{cases};$$

$$h_n(x) = \begin{cases} M_i^{(n)} = f\left(v_i^{(n)}\right), & x \in \left(x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}\right), 1 \le i \le k_n \\ f\left(x_i^{(n)}\right), & x = x_i^{(n)}, 0 \le i \le k_n \end{cases}.$$

Corpurile de rotație $G_n$ și $H_n$ generate de funcțiile $g_n$, respectiv $h_n$ sunt mulțimi cilindrice elementare cu proprietățile:

(1) $G_n \subset C_f \subset H_n$, $n \in \mathbb{N}$;

(2) $vol(G_n) = \pi\sum_{i=1}^{k_n} f_i^2\left(u_i^{(n)}\right)\left(x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}\right) = \sigma_{\Delta_n}\left(\pi f^2, u_i^{(n)}\right)$;

$vol(H_n) = \pi\sum_{i=1}^{k_n} f_i^2\left(v_i^{(n)}\right)\left(x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}\right) = \sigma_{\Delta_n}\left(\pi f^2, v_i^{(n)}\right).$

Funcția f fiind continuă, rezultă că și funcția $\pi f^2$ este continuă, deci este integrabilă pe intervalul $[a, b]$ și prin urmare:

$$\pi\int_a^b f^2(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sigma_{\Delta_n}\left(\pi f^2, u_i^{(n)}\right) = \lim_{n\to\infty} vol(G_n) = \lim_{n\to\infty}\sigma_{\Delta_n}\left(\pi f^2, v_i^{(n)}\right) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} vol(H_n). \quad (3)$$

Din relațiile (1)-(3) și definiția corpurilor care au volum, rezultă că $C_f$ are volum și $vol(C_f) = \pi\int_a^b f^2(x)dx.$ ■

## Exerciții rezolvate

☒ **1.** Să se calculeze volumul corpului de rotație determinat de funcția:
**a)** $f:[2, 4] \to \mathbb{R}, f(x) = 2x - 3$; **b)** $f:[0, 3] \to \mathbb{R}, f(x) = |2x+1| - |x-1|$.

*Soluție*

**a)** Corpul de rotație $C_f$ determinat de funcția f este un trunchi de con (figura 4). Volumul acestui trunchi de con se calculează astfel:

$$\text{vol}(C_f) = \pi\int_2^4 f^2(x)dx = \pi\int_2^4 (4x^2 - 12x + 9)dx = \pi\left(4\frac{x^3}{3} - 12\frac{x^2}{2} + 9x\right)\Bigg|_2^4 = \frac{62\pi}{3}.$$

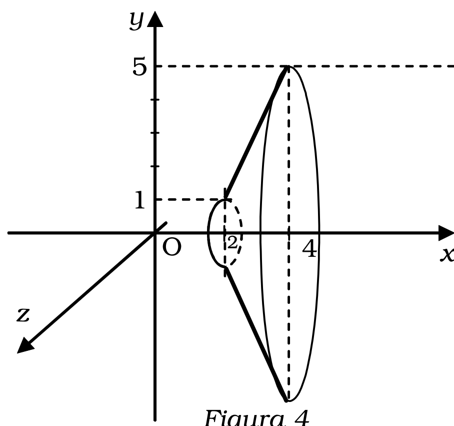


*Figura 4*

**b)** $f(x) = \begin{cases} 3x, & x \in [0, 1] \\ x+2, & x \in (1, 3] \end{cases}$, iar

$$\text{vol}(C_f) = \pi\int_0^3 f^2(x)dx = \pi\left(\int_0^1 (3x)^2\,dx + \int_1^3 (x+2)^2\,dx\right) = \frac{107}{3}\pi.$$

☒ **2.** Să se calculeze volumul corpului de rotație obținut prin rotirea în jurul axei Ox a mulțimii mărginite de parabola $y^2 = 2px$ pentru $x \in [0, a]$ (paraboloidul de rotație – figura 5).

*Soluție*

Funcția care determină corpul de rotație este $f:[0, a] \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{2px}$.

Rezultă că:

$$\text{vol}(C_f) = \pi\int_0^a 2px\,dx = \pi \cdot 2p\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^a = \pi pa^2.$$

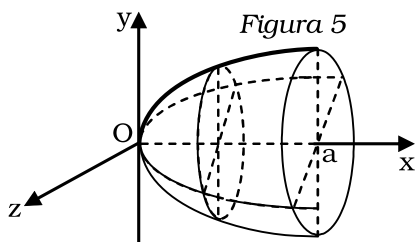


*Figura 5*

☒ **3.** Să se determine volumul corpului obținut prin rotirea în jurul axei Ox a semicercului superior cu centrul în origine și rază r (corp sferic – figura 6).

*Soluție*

Semicercul din enunț este caracterizat de ecuația $x^2 + y^2 = r^2,\ y > 0$.

Funcția asociată este:

$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2},\ x \in [-r, r]$.

$$\text{vol}(C_f) = \pi\int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)dx = \pi \cdot \left(r^2x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-r}^{r} = \frac{4\pi r^3}{3}.$$

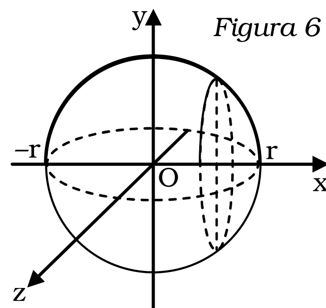


*Figura 6*

**❑ TEMĂ DE STUDIU**

**❍1. Se consideră funcția $f:[a, b] \to \mathbb{R}_+$, $f(x)=\sqrt{x^2-a^2}$ și $C_f$ corpul de rotație determinat de f, numit hiperboloid de rotație. Să se arate că volumul hiperboloidului de rotație este egal cu $vol(C_f)=\frac{\pi}{3}\left(b^3+2a^3-3a^2b\right)$.**

**❍2. Să se arate că volumul corpului generat prin rotirea elipsei de ecuație $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$, $a, b>0$ (numit elipsoid de rotație) în jurul axei Ox este egal cu $vol(C_f)=\frac{4\pi ab^2}{3}$.**

**❍3. Folosind calculul integral să se deducă formula de calcul a volumului conului circular drept și a trunchiului de con circular drept.**

☒ **4.** Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotirea în jurul axei Ox a suprafeței plane delimitate de arcele de parabolă $y=4-x^2$ și $y=2x-x^2$, cu $y>0$ și axa Ox.

*Soluție*

Suprafața plană din enunț este redată în figura 7. Volumul corpului de rotație $C_f$ generat prin rotirea acestei suprafețe este egal cu:

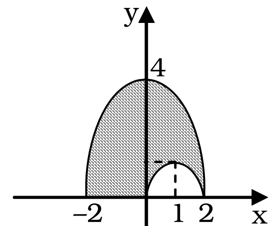


*Figura 7*

$$\mathcal{V}(C_f)=\pi\int_{-2}^{2}\left(4-x^2\right)^2 dx-\pi\int_{0}^{2}\left(2x-x^2\right)^2 dx=$$

$$=\pi\int_{-2}^{2}\left(16-8x^2+x^4\right)dx-\pi\int_{0}^{2}\left(4x^2-4x^3+x^4\right)dx=$$

$$=\pi\left(16x-\frac{8x^3}{3}+\frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_{-2}^{2}-\pi\left(\frac{4x^3}{3}-x^4+\frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_{0}^{2}=\frac{496\pi}{15}.$$

## EXERCIȚII ȘI PROBLEME

### EXERSARE

**E1. Să se calculeze volumele corpurilor de rotație determinate de funcțiile:**

**a)** $f:[0, 2]\to\mathbb{R}$, $f(x)=4x-x^2$;

**b)** $f:[0, \pi]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sin x$;

**c)** $f:\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\cos x$;

**d)** $f:[-1, 2]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+1}$;

**e)** $f:[1, 2]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$;

**f)** $f:[-2, 3]\to\mathbb{R}$, $f(x)=|x-1|$;

**g)** $f:[0, 3]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{3}-\sqrt{x}$;

**h)** $f:[a, a+1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2(x-a)}$;

**i)** $f:[1, 3]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{\sqrt{(x+2)(4-x)}}{x}$.

**E2.** Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotirea în jurul axei Ox a curbei definite prin:

a) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+9}},\ x\in[\sqrt{3},\ 3]$;

b) $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}},\ x\in[0,\ 1]$;

c) $f(x)=\sqrt{\frac{1}{x^2-1}},\ x\in[3,\ 5]$;

d) $f(x)=\frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{\sqrt{1+x^2}},\ x\in[0,\ 1]$.

## APROFUNDARE

**A1.** Să se calculeze volumul corpului de rotație determinat de funcția:

a) $f:\left[0,\frac{1}{2}\right]\to\mathbb{R},\ f(x)=\arcsin x$;

b) $f:\left[0,\frac{1}{2}\right]\to\mathbb{R},\ f(x)=xe^x$;

c) $f:[1,\ e]\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{x}\ln x$;

d) $f:[1,\ 4]\to\mathbb{R},\ f(x)=|3x+1|-|x-3|$.

**A2.** Fie $f:\left[-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right]\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt{1-x^2}-x$. Să se determine volumul corpului de rotație determinat de funcția f.

**A3.** Se consideră funcția

$f:\left[1,\ \sqrt{e}\right]\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{x^2}{2}-\ln\sqrt[4]{x}$.

Să se determine volumul corpului de rotație determinat de funcția f.

**A4.** Să se determine volumul corpului obținut prin rotirea în jurul axei Ox a curbei de ecuație: $(x-4)y^2=x(x-3),\ x\in[0,\ 3]$.

**A5.** Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotirea poligonului ABCD în jurul axei Ox, dacă $A(1,0)$, $B(2,\ 3)$, $C(4,\ 6)$, $D(10,\ 0)$.

**A6.** Fie funcțiile $f,\ g:[0,\ 1]\to\mathbb{R},\ f(x)=\arccos x,\ g(x)=\sqrt{x-x^2}$.

Să se determine volumul corpului de rotație generat prin rotirea în jurul axei Ox a mulțimii delimitate de graficele celor două funcții.

**A7.** Se consideră curbele de ecuații: $y=-x^2+3x+4,\ y=3x-x^2$, unde $y>0$.

a) Să se reprezinte grafic aceste curbe pe același sistem de axe de coordonate.

b) Să se calculeze aria suprafeței plane mărginite de aceste curbe și axa Ox.

c) Să se calculeze volumul corpului de rotație obținut rotind în jurul axei Ox suprafața plană cuprinsă între cele două curbe și axa Ox.

# 3 Calculul unor limite de șiruri folosind integrala definită

În clasa a XI-a s-au studiat diferite metode de determinare a limitei unui șir de numere reale.

Pentru anumite șiruri de numere reale calculul limitei se dovedește uneori destul de laborios, antrenând o arie largă de noțiuni și tehnici de lucru.

☞ ***Exemplu***

Să se determine $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{n+n}\right)$.

<u>Soluția 1</u> (folosind elemente de analiză matematică de clasa a XI-a):

Considerăm șirul $(a_n)$, $a_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{n+n}$.

• Studiul convergenței șirului $(a_n)$.

**a)** Șirul $(a_n)$ este șir de termeni pozitivi și $0<a_n<n\cdot\frac{1}{n+1}<1,\ \forall\ n\in\mathbb{N}^*$. Rezultă că șirul $(a_n)$ este șir mărginit.

**b)** Deoarece $a_{n+1}-a_n=\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{2(n+1)(2n+1)}>0,\ \forall\ n\in\mathbb{N}^*$, rezultă că $(a_n)$ este șir strict crescător. În concluzie șirul $(a_n)$ este șir convergent.

• Determinarea limitei șirului $(a_n)$

Pentru determinarea limitei șirului $(a_n)$ se va folosi șirul:

$(x_n)$, $x_n=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}-\ln n,\ n\in\mathbb{N}^*$.

Pentru studiul convergenței șirului $(x_n)$ se folosește inegalitatea $\frac{1}{k+1}<\ln(k+1)-\ln k<\frac{1}{k},\ k\in\mathbb{N}^*$, (1), obținută prin aplicarea teoremei lui Lagrange funcției $f:[k,\ k+1]\to\mathbb{R},\ f(x)=\ln x$ (temă).

Avem $x_{n+1}-x_n=\frac{1}{n+1}-\ln(n+1)+\ln n\overset{(1)}{<}0,\ \forall\ n\in\mathbb{N}^*$.

Rezultă că șirul $(x_n)$ este monoton descrescător, deci este mărginit superior de termenul $x_1=1$.

Însumând relațiile (1) pentru $k=\overline{1,n}$ se obține: $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n+1}<\ln(n+1)<1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}$, inegalități din care se obține $x_n>\ln(n+1)-\ln n>0,\ \forall\ n\in\mathbb{N}^*$.

Rezultă că șirul $(x_n)$ este monoton și mărginit, deci este șir convergent.

Legătura între șirurile $(a_n)$ și $(x_n)$ este dată de relația $a_n=x_{2n}-x_n+\ln 2$.

Trecând la limită în această relație se obține că $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\ln 2$.

<u>Soluția 2</u> (folosind elemente de calcul integral):

Termenul general al șirului $(a_n)$ se poate scrie sub forma:

$a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$, (2) unde $f:[0,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{1}{1+x}$.

Se observă că relația (2) reprezintă suma Riemann asociată funcției f pe intervalul $[0,1]$, diviziunii $\Delta_n=\left(0,\ \frac{1}{n},\ \frac{2}{n},\ ...,\ \frac{k}{n},\ ...,\ \frac{n}{n}\right)$ și sistemului de puncte intermediare $\xi_n=\left(\frac{1}{n},\ \frac{2}{n},\ ...,\ \frac{k}{n},\ ...,\ \frac{n}{n}\right)$.

Funcția f este continuă pe intervalul $[0, 1]$, deci este funcție integrabilă pe $[0, 1]$ și astfel $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \frac{1}{x+1}dx = \ln(x+1)\Big|_0^1 = \ln 2.$

Așadar, șirul $(a_n)$ este convergent și $\lim_{n\to\infty} a_n = \ln 2.$

## ➢ COMENTARIU

Soluția 2 arată că pentru anumite șiruri de numere reale al căror termen general se scrie ca o sumă Riemann atașată unei funcții integrabile pe un interval $[a, b]$, calculul limitei se poate face folosind integrala definită a acesteia.

În acest sens, reținem următorul rezultat general:

### ▣ TEOREMA 4

**1.** Dacă $f:[a, b]\to\mathbb{R}$ este o funcție integrabilă pe $[0, 1]$ și $a_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$, atunci $\lim_{n\to\infty} a_n = \int_0^1 f(x)dx.$

**2.** Dacă $f:[a, b]\to\mathbb{R}$ este funcție integrabilă pe $[a, b]$ și $a_n = \frac{b-a}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right)$, atunci $\lim_{n\to\infty} a_n = \int_a^b f(x)dx.$

**3.** Dacă $f:[a, b]\to\mathbb{R}$ este o funcție integrabilă pe $[a, b]$ și $a_n = \sigma_{\Delta_n}\left(f, \xi^{(n)}\right)$, unde $(\Delta_n)$ este un șir de diviziuni ale intervalului $[a, b]$, cu $\|\Delta_n\|\to 0$ și $\xi^{(n)}$ un sistem de puncte intermediare corespunzător diviziunii $\Delta_n$, atunci:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \int_a^b f(x)dx.$$

## *Probleme rezolvate*

☒ **1.** Să se calculeze limitele de șiruri:

**a)** $\lim_{n\to\infty} \frac{1^p + 2^p + \ldots + n^p}{n^{p+1}}$, $p\in\mathbb{N}$; **b)** $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\left(e^{\frac{1}{n}} + 2e^{\frac{2}{n}} + \ldots + ne^{\frac{n}{n}}\right).$

<u>*Soluție*</u>

**a)** Fie șirul $(a_n)$, $a_n = \frac{1^p + 2^p + \ldots + n^p}{n^{p+1}}$, $p\in\mathbb{N}.$

Termenul general $a_n$ se scrie sub forma:

$$a_n = \frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^p + \left(\frac{2}{n}\right)^p + \ldots + \left(\frac{n}{n}\right)^p\right] = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^p = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right),$$ unde

$f:[0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^p$ este o funcție integrabilă pe $[0, 1]$. Conform teoremei anterioare, rezultă că:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 x^p dx = \left.\frac{x^{p+1}}{p+1}\right|_0^1 = \frac{1}{p+1}.$$

> ❑ **TEMĂ**
> **Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{p+1}$ folosind lema lui Stolz-Cesaro.**

**b)** Fie șirul $(b_n)$, $b_n = \frac{1}{n^2}\left(e^{\frac{1}{n}} + 2e^{\frac{2}{n}} + \ldots + ne^{\frac{n}{n}}\right)$.

Atunci $b_n = \frac{1}{n}\left[\frac{1}{n}e^{\frac{1}{n}} + \frac{2}{n}e^{\frac{2}{n}} + \ldots + \frac{n}{n}e^{\frac{n}{n}}\right] = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)e^{\frac{k}{n}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$, unde $f:[0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = xe^x$. Deoarece f este funcție continuă pe $[0, 1]$, deci integrabilă pe $[0, 1]$, aplicând teorema 4 rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \int_0^1 f(x)dx =$

$$= \int_0^1 xe^x dx = \int_0^1 x\left(e^x\right)' dx = xe^x\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e^x(x-1)\Big|_0^1 = 1.$$

☒ **2.** Fie $f:[0, 1] \to \mathbb{R}$ o funcție integrabilă pe $[0, 1]$ și șirul $(a_n)$, $a_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{2k-1}{2n}\right)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

**a)** Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \int_0^1 f(x)dx$.

**b)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+3} + \ldots + \frac{1}{4n-1}\right)$.

<u>*Soluție*</u>

**a)** Considerăm diviziunea $\Delta_n = \left(0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}, \ldots, \frac{n}{n}\right)$, și sistemul de puncte intermediare $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k, \ldots, \xi_n)$, $n \in \mathbb{N}^*$, unde $\xi_k = \frac{2k-1}{2n} \in \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$, $k = \overline{1, n}$ (mijlocul intervalului).

Rezultă că $a_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) = \sigma_{\Delta_n}(f, \xi)$.

Deoarece f este funcție integrabilă pe intervalul $[0, 1]$ se obține că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \int_0^1 f(x)dx$, ceea ce trebuia demonstrat.

**b)** Considerăm $a_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+3} + \ldots + \frac{1}{4n-1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2n+(2k-1)} =$

$= \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{2k-1}{2n}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{2k-1}{2n}\right),$ unde $f:[0,1] \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{1+x}$

este funcție integrabilă pe intervalul $[0, 1]$.

Aplicând punctul a) se obține că:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+3} + \ldots + \frac{1}{4n-1}\right) = \frac{1}{2}\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{1+x}dx = \frac{1}{2} \cdot$$

$$\cdot \ln(x+1)\Big|_0^1 = \ln\sqrt{2}.$$

☒ **3.** Fie $f:[0,1] \to (1, +\infty)$ o funcție continuă pe $[0, 1]$ și șirul $(a_n)$, $a_n = \sqrt[n]{f\left(\frac{1}{n}\right) \cdot f\left(\frac{2}{n}\right) \cdot \ldots \cdot f\left(\frac{n}{n}\right)}, n \in \mathbb{N}^*.$

**a)** Să se arate că $\lim_{n\to\infty} a_n = e^{\int_0^1 \ln f(x)dx}$.

**b)** Să se calculeze $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1+\frac{n}{n}\right)}$.

<u>*Soluție*</u>

**a)** Termenul general al șirului $(a_n)$ se scrie sub forma:

$$a_n = e^{\ln \sqrt[n]{f\left(\frac{1}{n}\right)f\left(\frac{2}{n}\right)\ldots f\left(\frac{n}{n}\right)}} = e^{\frac{1}{n}\left[\ln f\left(\frac{1}{n}\right) + \ln f\left(\frac{2}{n}\right) + \ldots + \ln f\left(\frac{n}{n}\right)\right]} = e^{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln f\left(\frac{k}{n}\right)}.$$

Considerăm funcția $g:[0,1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = \ln f(x)$, care este funcție integrabilă pe intervalul $[0, 1]$.

**NE REAMINTIM!**

$\mathbf{x = a^{\log_a x}, x > 0, a > 0, a \neq 1}$

Rezultă că $\lim_{n\to\infty} a_n = e^{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g\left(\frac{k}{n}\right)} = e^{\int_0^1 g(x)dx} = e^{\int_0^1 \ln f(x)dx}$.

**b)** Se aplică punctul a) pentru funcția $f:[0,1] \to \mathbb{R}, f(x) = 1+x$ și se obține limita:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1+\frac{n}{n}\right)} = e^{\int_0^1 \ln(x+1)dx} = e^{x\ln(x+1)\big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{x+1}dx} = e^{\ln\frac{4}{e}} = \frac{4}{e}.$$

# EXERCIȚII ȘI PROBLEME

## EXERSARE

**E1.** Să se calculeze limitele șirurilor $(a_n)$ folosind integrala definită, dacă:

a) $a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \ldots + \frac{n}{n^2}$;

b) $a_n = \frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^4 + \left(\frac{2}{n}\right)^4 + \ldots + \left(\frac{n}{n}\right)^4\right]$;

c) $a_n = \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \ldots + \sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$;

d) $a_n = \frac{n}{n^2 + 1^2} + \frac{n}{n^2 + 2^2} + \ldots + \frac{n}{n^2 + n^2}$;

e) $a_n = \frac{\sqrt[n]{e} + \sqrt[n]{e^2} + \ldots + \sqrt[n]{e^n}}{n}$;

f) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2^2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n^2}}$;

g) $a_n = \frac{1}{\sqrt{4n^2 - 1}} + \frac{1}{\sqrt{4n^2 - 2^2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{4n^2 - n^2}}$.

## APROFUNDARE

**A1.** Folosind integrala definită, să se calculeze limitele șirurilor $(a_n)$, dacă:

a) $a_n = n\left(\frac{1}{1^2 + 3n^2} + \frac{1}{2^2 + 3n^2} + \ldots + \frac{1}{n^2 + 3n^2}\right)$;

b) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} + \frac{1}{\sqrt{n(n+2)}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{2n^2}}$;

c) $a_n = \frac{1}{n\sqrt{n}}\left(\frac{1}{\sqrt{1+n}} + \frac{2}{\sqrt{2+n}} + \ldots + \frac{n}{\sqrt{2n}}\right)$;

d) $a_n = \frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{\sqrt[n]{e}} + \frac{2}{\sqrt[n]{e^2}} + \ldots + \frac{n}{\sqrt[n]{e^n}}\right)$.

**A2.** Să se calculeze limitele șirurilor $(a_n)$ folosind integrala definită, știind că:

a) $a_n = \frac{n}{1 - 4n^2} + \frac{n}{2^2 - 4n^2} + \ldots + \frac{n}{n^2 - 4n^2}$;

b) $a_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1^2}{9n^2 - 1} + \frac{2^2}{9n^2 - 4} + \frac{3^2}{9n^2 - 9} + \ldots + \frac{n^2}{8n^2}\right)$;

c) $a_n = \frac{n+1}{n^2 + 1^2} + \frac{n+2}{n^2 + 2^2} + \ldots + \frac{n+n}{n^2 + n^2}$;

d) $a_n = \frac{1}{n}\left[\ln\left(1 + \frac{2007}{n}\right) + \ln\left(1 + \frac{2008}{n}\right) + \ldots + \ln\left(1 + \frac{n}{n}\right)\right]$.

**A3.** Folosind integrala definită, să se calculeze:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{2k - 1}{n\sqrt{(2k-1)^2 + 4n^2}}$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} 4n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4n^2 + (2k-1)^2}$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3n+2} + \frac{1}{3n+5} + \ldots + \frac{1}{6n-1}\right)$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+\sqrt{3}} + \frac{1}{n+\sqrt{7}} + \ldots + \frac{1}{n + \sqrt{n^2 - n + 1}}\right)$.

**A4.** Să se arate că:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \sqrt[n]{\left(n^2+1^2\right)\left(n^2+2^2\right)\ldots\left(n^2+n^2\right)} = 2e^{\frac{\pi}{2}-2}$.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt[n]{\left(1+\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{n}\right)\ldots\left(\sqrt{n}+\sqrt{n}\right)} = \sqrt{e}$.

**A5.** Să se verifice egalitățile:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\cos\frac{\pi}{n}+\cos\frac{2\pi}{n}+\ldots+\cos\frac{n\pi}{n}\right) = 0$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \sin\frac{k\pi}{n} = \frac{2}{\pi}$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\sum\limits_{k=1}^{n} k \cdot \operatorname{arctg}\frac{k^2}{n^2} = \frac{\pi-\ln 4}{8}$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} e^{\frac{k\pi}{n}} \sin\frac{k\pi}{2n}\cos\frac{k\pi}{2n} = \frac{e}{4\pi}\left(1+\sin 1-\cos 1\right)$;

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \operatorname{tg}^2\frac{k\pi}{3n} = \frac{3\sqrt{3}}{\pi}-1$.

**A6.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, cu proprietatea că $f(n+1)\in[n, n+1)$, $\forall\, n\in\mathbb{N}$.
Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+f(1)}+\frac{1}{n+f(2)}+\ldots+\frac{1}{n+f(n)}\right)$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1-f(1)}+\frac{2}{2n+4-f(2)}+\ldots+\frac{n}{2n^2-f(n)}\right)$.

**A7.** Să se calculeze limita șirului $(a_n)$, dacă:

a) $a_n = \frac{1}{n+\frac{1^2}{2}}+\frac{1}{n+\frac{2^2}{3}}+\ldots+\frac{1}{n+\frac{n^2}{n+1}}$;

b) $a_n = \frac{1}{n+1-\sin\pi}+\frac{1}{n+2-\sin\frac{\pi}{2}}+\ldots+\frac{1}{2n-\sin\frac{\pi}{n}}$.

## TESTE DE EVALUARE

### Testul 1 (pe două grupe)

**❍1.** Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinse între curbele:

Grupa 1: $y = x^3$, $y = 4x$; Grupa 2: $y = 2x^3$, $y = \frac{1}{2}x$.

*(3 puncte)*

**❍2.** Să se calculeze volumul corpului de rotație generat de rotirea graficului funcției $f:[0, \pi]\to\mathbb{R}$, în jurul axei Ox:

Grupa 1: $f(x) = \sin^2 x$; Grupa 2: $f(x) = 2\sin^2 x$.

*(3 puncte)*

**❍3.** **Să se calculeze limitele:**

**Grupa 1:** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}+\ldots+\sqrt{2n}}{n\sqrt{n}}$;

**Grupa 2:** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+3}+\ldots+\dfrac{1}{3n-1}\right)$.

***(3 puncte)***

## Testul 2

**❍1.** **Se consideră funcția** $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=2x+ax\ln x$. **Să se determine** $a\in\mathbb{R}$ **știind că aria suprafeței mărginite de graficul funcției f, axa Ox și dreptele** $x=1,\ x=e$ **este egală cu** $\dfrac{3e^2-5}{4}$.

***(3 puncte)***

**❍2.** **Să se determine volumul corpului de rotație** $C_f$ **determinat de funcția** $f:[0,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{\sqrt{x\cdot \operatorname{arctg} x}}{1+x^2}$.

***(3 puncte)***

**❍3.** **Să se calculeze integrala** $\int_0^1 \ln\left(1+x^2\right)dx$ **și limita șirului** $(a_n)$,

$$a_n=\frac{1}{n}\left[\sum_{k=1}^{n-1}\ln\left(k^2+n^2\right)-2(n-1)\ln n\right],\ n\in\mathbb{N}^*.$$

***(3 puncte)***
***(Bacalaureat, iunie, 1998)***

## Testul 3

**❍1.** **Se consideră curbele de ecuații** $y=x^2+mx$ **și** $y=x+m,\ m\in\mathbb{R}$.

**a) Să se determine aria** $\mathscr{A}(m)$ **a suprafeței plane cuprinse între cele două curbe.**

**b) Să se determine** $m\in\mathbb{R}$ **astfel încât** $\mathscr{A}(m)=36$.

***(4 puncte)***

**❍2.** **Se consideră** $n\in\mathbb{N}^*$ **și funcția** $f:[-1,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=\cos(n\arccos x)$.

**Să se determine:**

**a) volumul corpului de rotație** $C_f$;

**b)** $n\in\mathbb{N}^*$ **pentru care** $\operatorname{vol}(C_f)=\dfrac{2\pi}{3}$.

***(3 puncte)***

**❍3.** **Fie** $k\in\mathbb{N}^*$. **Să se arate că** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+k}+\dfrac{1}{n+2k}+\ldots+\dfrac{1}{n+nk}\right)=\dfrac{\ln(k+1)}{k}$.

***(2 puncte)***

# TEME DE SINTEZĂ

## TEMA 1
## – Mulțimi de numere: $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ –

**Noțiuni de recapitulat**

- forme de scriere;
- parte întreagă;
- parte fracționară;
- relația de ordine pe $\mathbb{R}$;
- operații;
- puteri și radicali;
- logaritmi;
- intervale;
- mulțimi mărginite;
- vecinătăți;
- elemente de logică matematică;
- tipuri de raționamente.

### SETUL 1 DE PROBLEME (MULȚIMEA $\mathbb{R}$ )

**❍1.** Se dau numerele reale:

$$x=\left(3\frac{3}{5}\right)^{-1}+\sqrt{0,8(3)\cdot 0,0(3)} \text{ și}$$

$$y=\left(\frac{7}{2\sqrt{3}}\right)^{2}\cdot\left[0,125-0,25+(-1)^{-4}\right]^{-2}.$$

a) Să se determine media aritmetică, media geometrică și media armonică a numerelor x, y.

b) Să se calculeze $[x+y]$, $\{y-x\}$ și

$$\log_{\frac{3}{4}}^{3}(xy)^{2}.$$

**❍2.** Se dă numărul real $x=\sqrt{\dfrac{97n+2}{2n-1}}$, $n\in\mathbb{Z}^{*}$.

a) Pentru $n=1$ să se calculeze produsul primelor 3 zecimale ale lui x.

b) Să se determine mulțimea $A=\{n\in\mathbb{N}\mid x\in\mathbb{N}\}$.

**❍3.** Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât să existe:

a) $\sqrt{m(m+2)x^{2}-(2+m)x+1}$ pentru oricare $x\in\mathbb{R}$;

b) $\log_{2}\dfrac{m^{2}-4}{m-3}$.

**❍4.** Să se raționalizeze expresiile:

a) $\dfrac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$; b) $\dfrac{1}{\sqrt[5]{4}}$; c) $\dfrac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}+\sqrt{3}}$.

**❍5.** Să se demonstreze că:

a) $\dfrac{1}{1\sqrt{2}+2\sqrt{1}}+\dfrac{1}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}+\ldots+\dfrac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}}=1-\dfrac{\sqrt{n+1}}{n+1}$, $\forall\ n\in\mathbb{N}^{*}$;

b) $\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\geq\sqrt{n}$, $\forall\ n\in\mathbb{N}^{*}$.

**❍6.** Se dau intervalele de numere reale $I=(-\infty,\ x^{2})$, $J=(x^{2}-1,\ +\infty)$ și $K=(1-x,\ 3)$.

Să se determine $x\in\mathbb{R}$ pentru care:

a) K este interval simetric;

**b) K este interval centrat în $a = -1$;**

**c) J este vecinătate a punctului $a = 3$;**

**d) $K \subset I \cap J$.**

❍**7.** **Să se aducă la forma cea mai simplă expresiile:**

a) $\log_{0,32}\left(\frac{2}{5}\sqrt{2}\right) + \log_{\frac{1}{128}}\frac{1}{32}$;

b) $\log_2\left(\ln e^4\right) - \log_8 384 + \log_8 3 - \frac{1}{3}\sqrt[4]{9\sqrt[3]{243}}$.

❍**8.** **Fie mulțimea** $A(a,\ b) = \left\{\frac{x+1}{x-a}\ \middle|\ x \in (b,\ +\infty),\ b \geq a\right\}$.

a) **Să se arate că $A(1,\ 2)$ este mulțime mărginită și să se afle $\inf A$, $\sup A$.**

b) **Să se arate că $A(1,\ 1)$ este nemărginită superior și să se determine mulțimea minoranților.**

❍**9.** **Se consideră funcția** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{x+1}{x^2+x+1}$. **Să se determine** $\operatorname{Im} f$.

❍**10.** **Să se determine mulțimea de adevăr a predicatelor:**

a) $p(x)$ : „$\left(x^2 - 3x + 1\right)\left(x^2 - 3x - 3\right) = 5,\ x \in \mathbb{N}$";

b) $p(x,\ y)$ : „$(2x + y + 2)\sqrt{2} + (4x + y + 5)\sqrt{7} = 0,\ x,\ y \in \mathbb{Q}$".

**SETUL 2 DE PROBLEME (MULȚIMEA $\mathbb{C}$)**

**Noțiuni de recapitulat**

- forma algebrică;
- forma trigonometrică;
- operații cu numere complexe;
- numere complexe conjugate;
- modulul unui număr complex;
- rezolvarea în $\mathbb{C}$ a ecuației de gradul 2 cu coeficienți în $\mathbb{R}$;
- aplicație în geometrie.

❍**1.** **Să se determine $x,\ y \in \mathbb{R}$ pentru care are loc egalitatea:**

a) $\left(\frac{x-1}{2} + 3yi\right) + \left(\frac{y-1}{3} - 4xi\right) = 2(y - x) + i$;

b) $\frac{3 + xi}{(3 - 2i)} + \frac{x + y}{(3 + 2i)} = 1$;

c) $(x + 2y + i)(y - i) = (y + x + i)(3 - 4i)$.

❍**2.** **Să se calculeze opusul, inversul, conjugatul și modulul numărului complex** $z = \frac{(1 - i)\left(\sqrt{3} + i\right)}{1 + i}$.

❍**3.** **Să se determine numărul complex z în cazurile:**

a) $z^2 = \frac{-2 + 4i}{2 + i}$; b) $2z + z \cdot \overline{z} = 4 + 2i$; c) $i|z| + |z - 1| = 1 + i$.

❍4. Fie S suma valorilor distincte pe care le ia $a_n = \left|x^n + \frac{1}{x^n}\right|$, dacă $x^2 + x + 1 = 0$, $n \in \mathbb{N}^*$. Atunci:

a) $S = 4$; b) $S = 3$; c) $S = 5$; d) $S = 8$; e) $S = 12$.

*(Admitere ASE, București, 1997)*

❍5. Fie $A = \left\{x \in \mathbb{C} \;\middle|\; z \cdot \bar{z} = 2, \left|\frac{2z+3}{z-3i}\right| = 1\right\}$. Dacă $S = \sum_{z \in A} z$, atunci:

a) $S = 1 - 2i$; b) $S = 3$; c) $S = 1 + 2i$; d) $S = -\frac{4}{5} - \frac{2i}{5}$.

*(Admitere ASE, București, 2004)*

❍6. Valoarea expresiei $E = \frac{i \cdot i^2 \cdot i^3 \cdot \ldots \cdot i^{2007}}{i + i^2 + i^3 + \ldots + i^{2009}}$ este:

a) $-i$; b) 2007; c) 0; d) $d = 1$.

❍7. a) Se consideră ecuația $x^2 - 4x + 5 = 0$ cu soluțiile $x_1, x_2$. Să se calculeze $x_1^2 + x_2^2$, $x_1^3 + x_2^3$, $x_1^4 + x_2^4$, $\frac{x_1^2 + 3}{x_1^2 - 1} + \frac{x^2 + 3}{x_2^2 - 1}$.

b) Să se formeze ecuația de gradul 2 cu coeficienți reali care are o soluție dată de $z_1 = \frac{1 - 3i}{2 - i}$.

❍8. Se consideră ecuația bipătrată $x^4 - 2mx^2 + (m+1)^2 = 0$, $m \in \mathbb{R}$. Să se determine m astfel încât ecuația să aibă:

a) toate soluțiile în $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$;

b) două soluții reale.

❍9. Se dau numerele complexe $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ și $z_2 = 1 - i$.

a) Să se scrie sub formă trigonometrică $z_1$ și $z_2$.

b) Să se calculeze $(z_1 z_2)^{10}$, $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{15}$ și rădăcinile de ordinul 4 ale numărului $z_1$.

❍10. Se consideră punctele A, B, C cu afixele $z_A = 6 + 5i$, $z_B = 7 - 3i$, $z_C = -2 + 4i$.

a) Să se calculeze perimetrul triunghiului ABC.

b) Să se determine distanța dintre centrul de greutate al triunghiului și centrul cercului circumscris acestuia.

c) Să se determine punctul $D(4 + bi)$ știind că este coliniar cu punctele A și B.

# TEMA 2
## – Funcții. Proprietăți –

**Noțiuni de recapitulat**

- monotonie;
- mărginire;
- paritate-imparitate;
- convexitate-concavitate;
- periodicitate;
- injectivitate;
- surjectivitate;
- bijectivitate;
- inversabilitate;
- continuitate;
- derivabilitate;
- primitivabilitate;
- integrabilitate.

**SETUL 1 DE PROBLEME**

**❍1.** Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=ax^2+bx+2,\ a,\ b\in\mathbb{R}$.

a) Pentru $a=0$, să se dea exemplu de o funcție f care să fie strict crescătoare pe $\mathbb{R}$ și de alta care să fie strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$.

b) Dacă $b=0$, să se precizeze paritatea (imparitatea) funcției obținute.

c) Dacă $a=1,\ b=-3$, să se arate că funcția f este mărginită inferior și să se precizeze dacă este funcție convexă sau concavă pe $\mathbb{R}$.

**❍2.** Se dă funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}x+m, & x\ge 1\\ -x^2+2x, & x<1\end{cases}$.

a) Pentru $m=0$ să se arate că funcția f este inversabilă și să se determine $f^{-1}$.

b) Să se rezolve ecuația $4\left[f(x)-f^{-1}(x)\right]=7-7x$.

c) Să se arate că funcția $f^{-1}$ este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

**❍3.** Să se studieze injectivitatea și surjectivitatea funcției:

a) $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C},\ f(z)=2z+5\overline{z}$;

b) $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C},\ f(z)+2f(\overline{z})=2z+3\overline{z},\ \forall\ z\in\mathbb{C}$;

c) $f:\mathbb{R}\setminus\{-2\}\to\mathbb{R}\setminus\{3\},\ f(x)=\dfrac{3x-1}{x+2}$.

**❍4.** Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=3x+4$. Să se determine funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu proprietatea că $\left(f\circ g\circ f^{-1}\right)(x)=\dfrac{3}{2}x+1$.

**❍5.** Să se studieze periodicitatea funcției:

a) $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{R},\ f(n)=\left\{\dfrac{n}{2}\right\}+\left\{\dfrac{n}{3}\right\}$;

b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=2\sin 3x$.

**❍6.** Să se arate că:

a) funcția $f:\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\to\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ f(X)=X^2$ nu este surjectivă;

b) funcția $f:S_n\to S_n,\ f(x)=\sigma x\sigma^{-1}$, unde $\sigma\in S_n$ este funcție inversabilă și să se calculeze $f^{-1}$;

c) funcția $f:\mathbb{Z}_n\to\mathbb{Z}_n,\ f(x)=x^2+x+\hat{1}$ nu este bijectivă pentru $n\in\{2,\ 3,\ 4,\ 5\}$.

**○7.** **Câte funcții $f : \{1, 2, 3, 4\} \to \{1, 2, 3, 4\}$ injective, verifică egalitatea:**

**a) $f(1) \cdot f(2) = 4$; b) $f(1) + f(2) = 3$?**

**SETUL 2 DE PROBLEME**

**○1.** **Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 9^{ax} - 4 \cdot 3^{ax+1} + 12, & x < 1 \\ -15x^2 - ax + a, & x \ge 1 \end{cases}$.**

**a) Să se arate că pentru $a = 1$ funcția este continuă.**
**b) Să se studieze continuitatea funcției f discutând după $a \in \mathbb{R}$.**

**○2.** **Se consideră funcția $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} px, & x \in [0, 1) \\ m, & x = 1 \\ x^3 + q, & x \in (1, 2] \end{cases}$.**

**Fie $A = \{(p, m, q) \in \mathbb{R}^3 \mid f \text{ derivabilă pe } (0, 2)\}$, $S = \sum_{(p, m, q) \in A} (p + m + q)$.**

**Atunci: a) $S = 7$; b) $S = -1$; c) $S = 0$; d) $S = 10$; e) $S = 8$.**

***(Admitere, ASE, București, 1998)***

**○3.** **Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (-1)^{[x]}\left(x + a \cdot \left[\frac{x}{2}\right] + b\right) + 3$, $a, b \in \mathbb{R}$.**

**Dacă $A = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid f \text{ este periodică cu perioada 2 și continuă în } x = 1\}$ și $S = \sum_{(a, b) \in A} (a + b)$, atunci:**

**a) $S = 2$; b) $S = -1$; c) $S = 0$; d) $S = -3$; e) $S = 4$.**

***(Admitere, Economie generală, București, 2002)***

**○4.** **Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} |x - 1| + a, & x < 2 \\ b \cdot |x^2 - 9| + 2, & x \in [2, 4] \\ |x - 5| + bx + 4, & x > 4 \end{cases}$.**

**a) Să se determine parametrii $a, b \in \mathbb{R}$ știind că funcția admite primitive pe $\mathbb{R}$.**

**b) Să se determine primitivele funcției f pe intervalul $[1, 4]$.**

**c) Să se arate că pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$, f este integrabilă pe intervalul $[-1, 5]$.**

**d) Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $\int_1^3 f(x)\,dx = 14$ și $\int_4^6 f(x)\,dx = 39$.**

**○5.** **Se consideră funcția polinomială $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^5 + ax^3 + 85x - 2$.**

**a) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ știind că $f''(-3) = 0$.**

**b) Pentru $a = -30$, să se precizeze intervalele de monotonie și convexitate-concavitate ale funcției f.**

**○6.** **a) Să se demonstreze că suma a două funcții convexe $f, g : I \to \mathbb{R}$ (I interval deschis) este funcție convexă.**
**b) Să se arate că următoarele funcții sunt convexe:**
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = ax^4 + bx^2 + cx + d,\ a, b, c, d \in \mathbb{R}$ și $a, b > 0$;
$h : (0, +\infty) \to \mathbb{R},\ h(x) = 4x^4 + 3x^2 - 5x + 7 + \log_{\frac{1}{5}} x$.

*(Bacalaureat, 1999)*

**○7.** **Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuă și $a > 0$ astfel încât:**
$\int_x^{a+x} f(t)\,dt = 3,\ \forall\ x \in \mathbb{R}$.
**Să se stabilească valoarea de adevăr a propozițiilor:**
**a) f este periodică;**
**b) f este injectivă;**
**c) f este surjectivă;**
**d) f este mărginită.**

# TEMA 3
## – Ecuații, inecuații, sisteme de ecuații și inecuații –

**SETUL 1 DE PROBLEME**

**○1.** **Să se determine $x \in \mathbb{R}$ în cazurile:**
a) $\frac{2x-1}{3} \in \left(\frac{x-1}{2}, \frac{2x+1}{5}\right)$;
b) $3x + 1 \in \left[2x, x^2 + 1\right]$.

**○2.** **Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,**
$f(x) = (2m+3)x^2 - 2(1+3m)x + 7$,
$m \in \mathbb{R}$.
**a) Pentru ce valori ale lui m graficul funcției f intersectează axa Ox în două puncte distincte?**
**b) Să se determine $m \in \mathbb{R}$ pentru care graficul funcției este situat sub axa Ox.**
**c) Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât ecuația $f(x) = 0$ să aibă soluțiile negative.**
**d) Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât soluțiile $x_1, x_2$ ale ecuației $f(x) = 0$ să verifice relația $x_1 + 2x_2 = 3$.**

**Noțiuni de recapitulat**

– semnul funcțiilor de gradul I și de gradul II;
– tipuri de ecuații, inecuații, sisteme:
- de gradul I și II;
- cu parte întreagă și parte fracționară;
- cu modul;
- iraționale;
- exponențiale;
- logaritmice;
- trigonometrice;
- combinatorice;
- cu permutări;
- matriceale;
- sisteme de ecuații liniare;
- algebrice cu coeficienți într-un corp.

**○3.** **Se consideră ecuația $x^2 - |x| = mx(x+1)$, $m \in \mathbb{R}$.**
**Dacă $M = \{m \in \mathbb{R} \mid$ ecuația are exact trei rădăcini reale distincte$\}$, atunci:**
a) $M = (-\infty, -1]$; b) $M = (-1, 1)$; c) $M = (2, +\infty)$; d) $M = \varnothing$; e) $M = \mathbb{R}$.

*(Admitere ASE, București, 1997)*

**❍4.** Fie $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \;\middle|\; \left[\frac{2x+1}{4}\right] = x - 3, \left[\frac{3x-1}{2}\right] = y + 3\right\}$.

Dacă $M = \sum_{(x, y) \in A} \frac{x}{y}$, atunci:

a) $M = \frac{49}{20}$; b) $M = \frac{5}{8}$; c) $M = \frac{24}{7}$; d) $M = 7$; e) $M = \frac{63}{29}$.

*(Admitere ASE, București, 2003)*

**❍5.** Să se rezolve:

a) $\sqrt{\frac{x+4}{x-4}} + 2\sqrt{\frac{x-4}{x+4}} = \frac{11}{3}$; *(Bacalaureat, 2002)*

b) $\sqrt{4 - x^2} > 1 - x$;

c) $\left(7 - 4\sqrt{3}\right)^{3x} + \left(7 + 4\sqrt{3}\right)^{3x} = 14$.

**❍6.** Se dă funcția $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[4]{2 - \lg x}$.

a) Să se determine D.

b) Să se determine $x \in D$, astfel încât termenul al cincilea din dezvoltarea binomului $\left(1 + x^{f(x)}\right)^6$ să fie 15.

*(Simulare Bacalaureat, 2000)*

**❍7.** Pe $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție „ $\circ$ “ prin $x \circ y = x + y - 1$, $\forall\ x, y \in \mathbb{R}$.

a) Să se rezolve ecuația $2^x \circ 4^x = 5$.

b) Să se rezolve în $\mathbb{N}^*$ ecuația $C_n^0 \circ C_n^1 \circ C_n^2 = 44 + n$.

c) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuația $x \circ x^2 \le 1$.

*(Bacalaureat, 2002)*

**❍8.** Să se rezolve sistemul de ecuații:

$A_x^y = 10A_x^{y-1}$, $C_x^y = \frac{5}{3}C_x^{y+1}$.

*(Admitere Universitatea Transilvania, Brașov, 2002)*

**❍9.** Să se rezolve ecuațiile:

a) $2\sin^2 x + 5\cos x - 4 = 0$;

b) $\sin x + 2\sin 3x + \sin 5x = 0$;

c) $\sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x = 2$.

**❍10.** Să se rezolve sistemele de ecuații:

a) $\begin{cases} x^2 + 2^y = 8 \\ x + 2^{y+1} = 10 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ \log_2 x - \log_4 y = 1 \end{cases}$; c) $\begin{cases} 3x - \sqrt{y+1} = 3 \\ -x + 2\sqrt{y+10} = 5 \end{cases}$.

**SETUL 2 DE PROBLEME**

**❍1. Să se rezolve ecuațiile:**

a) $\begin{vmatrix} x & i \\ 1+x & i+x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+i & 1+i \\ 1-i & x+i \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} x+1 & x+3 & 2x+5 \\ x-1 & x & 2x+1 \\ 2x+6 & 2x+3 & x \end{vmatrix} = 0.$

**❍2. Să se calculeze determinantul** $D = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}$ **știind că** $x_1, x_2, x_3$ **sunt soluțiile ecuației** $x^3 - 2x^2 + 2x + 17 = 0$.

*(Admitere Universitatea Brașov, 2000)*

**❍3. Să se determine** $a \in \mathbb{R}$ **astfel încât ecuația:**

$\begin{vmatrix} 2-a & a-x & x-1 \\ 1-x^2 & x^2 & -1 \\ 2-a-2x & x+a & x-2 \end{vmatrix} = 0$ **să aibă o rădăcină dublă număr întreg.**

**❍4. Să se rezolve ecuațiile matriceale:**

a) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; b) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 2 \end{pmatrix}$, **unde** $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

**❍5. Fie** $\alpha, \beta \in S_6$, $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 2 & 6 & 1 & 5 \end{pmatrix}$. **Să se determine signatura permutărilor** $\alpha$ **și** $\beta$ **și să se rezolve ecuațiile:**

a) $\alpha^{10}x = \beta^{16}$; b) $\alpha^{-200}y\beta^{-101} = (\alpha\beta)^{50}$.

**❍6. Fie matricea** $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

**a) Să se determine rangul lui A în funcție de m.**

**b) Pentru** $m = 1$ **să se calculeze** $A^{-1}$.

**c) Să se rezolve discutând sistemul de ecuații liniare** $\begin{cases} 2x + y + 3z = 1 \\ x - y + z = -1 \\ x + 2y + mz = m \end{cases}$.

*(Admitere Universitatea Craiova, 2004)*

**❍7. Se dă sistemul de ecuații liniare:**

$\begin{cases} 2x - y + z - t = 1 \\ x + y + az + t = -1 \\ x + y + z - t = b \end{cases}$, $a, b \in \mathbb{R}$.

**a) Să se determine a și b astfel încât matricea sistemului să fie de rang 2 și sistemul să fie compatibil.**

**b) Pentru** $a = -1$ **și** $b = 1$ **să se rezolve sistemul.**

*(Bacalaureat, 1999)*

❍8. Să se rezolve ecuațiile:

a) $x^4 - 15x^2 - 16 = 0$; b) $3x^3 + 7x^2 + 7x + 3 = 0$;

c) $x^4 - 8x^3 + 14x^2 - 8x + 1 = 0$; d) $2x^4 + x^3 - 4x^2 - 10x - 4 = 0$.

❍9. Să se rezolve ecuația în condițiile date:

a) $4x^3 - 12x^2 + 11x + 3a = 0$, dacă soluțiile sunt în progresie aritmetică;

b) $2x^3 - (x+4)x^2 + 7x - 2 == 0$, dacă soluțiile sunt în progresie geometrică;

c) $x^4 - 6x^3 + 2x^2 - 6x + a = 0$, $a \in \mathbb{Q}$ și $x_1 = 3 - 2\sqrt{2}$.

d) $x^4 - 4x^3 + x^2 + ax - 20 = 0$, $a \in \mathbb{R}$ și $x_1 = 2 + i$.

❍10. Fie polinomul $f \in \mathbb{Z}_5[X]$, $f = X^4 + aX^2 + \hat{2}X + b$.

a) Să se determine $a, b \in \mathbb{Z}_5$ știind că $f \,\vdots\, (X + \hat{4})(X + \hat{2})$.

b) Pentru $a = b = \hat{1}$ să se descompună polinomul f în produs de factori ireductibili.

c) Dacă $d \in \mathbb{Z}_5[X]$ este c.m.m.d.c. al polinoamelor $g = X^3 + \hat{3}X + \hat{1}$ și f pentru $a = b = \hat{1}$, să se rezolve ecuația $d(x) = \hat{0}$.

d) Să se afle posibilitatea ca polinoamele f și g să aibă cel puțin o rădăcină comună.

❍11. Să se arate că:

a) dacă $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, atunci $A^2 - (a+d)A + (ad - bc)I_2 = O_2$;

b) există o matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, pentru care $\text{rang}(M) \neq \text{rang}(M^2)$;

c) dacă matricea $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ este inversabilă, atunci matricea $B^n$ este inversabilă, $\forall n \in \mathbb{N}^*$;

d) dacă matricea $D \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ verifică relația $\text{rang}(D) = \text{rang}(D^2)$, atunci $\text{rang}(D) = \text{rang}(D^n)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

*(Bacalaureat, 2006)*

## TEMA 4
## – Elemente de geometrie plană –

**Noțiuni de recapitulat**
- vectori în plan;
- operații cu vectori;
- vectorul de poziție al unui punct;
- coliniaritate, concurență, paralelism;
- funcții trigonometrice;
- aplicații ale trigonometriei în geometrie;
- dreapta în plan – ecuații ale dreptei;
- calcul de distanțe;
- arii.

❍1. Fie triunghiul ABC și M, N, P mijloacele laturilor $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$. Să se demonstreze că pentru orice punct O din plan au loc relațiile:

a) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OP}$;

b) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}$.

❍2. Se consideră punctele $A(3, 2)$, $B(8, 4)$, $C(8, 8)$, $D(3, 6)$.

a) Să se arate că vectorii $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{CD}$ sunt vectori coliniari.

b) Să se determine coordonatele punctului M dacă $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}$.

**c) Să se determine coordonatele punctului N astfel încât BCND este paralelogram.**
**d) Să se arate că punctele C, M, N sunt coliniare.**

**❍3.** **Fie D, E, F mijloacele laturilor $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$ ale triunghiului ABC. Să se arate că:**

**a)** $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CF} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$;

**b)** $\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{OE} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{OF} \cdot \overrightarrow{AB} = 0, \ \forall\ O \in \mathscr{P}$.

**❍4.** **Să se verifice dacă au loc egalitățile pe domeniul de existență:**

**a)** $\dfrac{\sin^2 x}{\sin x - \cos x} - \dfrac{\sin x + \cos x}{\operatorname{tg}^2 x - 1} = \sin x + \cos x$;

**b)** $2\left(\sin^6 x + \cos^6 x\right) - 3\left(\sin^4 x + \cos^4 x\right) + 1 = 0$;

**c)** $\dfrac{\cos(-480°)}{\cos 660°} - \dfrac{\operatorname{tg} 570° \cdot \sin 675°}{\cos 900°} = -1 - \dfrac{\sqrt{6}}{6}$.

**❍5.** **Să se calculeze** $\sin(a+b)$ **și** $\cos(a-b)$ **dacă** $\sin a = \dfrac{3}{5}$, $\sin b = -\dfrac{5}{13}$ **și** $a \in \left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$, $b \in \left(\pi, \dfrac{3\pi}{2}\right)$.

**❍6.** **Să se aducă la o formă mai simplă expresiile:**

**a)** $\dfrac{\sin 27x + \sin 13x}{\cos 41x - \cos x}$;

**b)** $\dfrac{\sin^2 3x - \sin^2 7x}{\cos^2 3x - \cos^2 7x}$;

**c)** $\sin^2 x + 2\cos a \cos x \cos(a+x) - \cos^2(a+x)$;

**d)** $\operatorname{tg}\dfrac{3x}{2} + \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$.

**❍7.** **Să se demonstreze că pentru oricare** $a, x \in \mathbb{R}$ **au loc relațiile:**

**a)** $(1 - \sin a)x^2 - 2x\cos a + 1 + \sin a \geq 0$;

**b)** $\sin^4 x + \cos^4 x \geq \dfrac{1}{2}$.

**❍8.** **Se dă triunghiul ABC în care se cunosc** $a = 12$, $B = 105°$, $C = 15°$.
**a) Să se rezolve triunghiul ABC.**
**b) Să se calculeze aria suprafeței $[ABC]$.**
**c) Să se determine lungimea medianei din A.**
**d) Să se determine R și r.**

**❍9.** **Se dau punctele** $A(a+1,\ 2a-1)$, $B(3a-2,\ a-1)$, $C(4,\ 6)$, $D(1,\ 0)$, **distincte. Să se determine** $a \in \mathbb{R}$ **în cazurile:**
**a) centrul de greutate al triunghiului ABC este situat pe prima bisectoare a axelor de coordonate;**

b) $\mathscr{A}_{[ABC]} = \frac{3}{2}$;

c) A, B, D sunt puncte coliniare;

d) dreptele AB și CD sunt paralele;

e) dreptele AD și BC sunt perpendiculare;

f) punctele A și B sunt egal depărtate de dreapta CD.

## TEMA 5
## – Șiruri de numere reale. Limite de funcții –

**Noțiuni de recapitulat**
- șiruri monotone;
- șiruri mărginite;
- progresii aritmetice;
- progresii geometrice;
- limita unui șir;
- criterii de existență a limitei unui șir;
- șiruri tip;
- cazuri de nedeterminare;
- limita unei funcții într-un punct;
- operații cu limite de funcții;
- calculul unor limite de șiruri folosind integrala.

❍1. Fie $(a_n)$ o progresie aritmetică.

a) Să se determine $a_1$ și rația r dacă $2a_5 - 3a_2 + a_{10} = 42$ și $a_2 \cdot a_5 = 112$.

b) Să se calculeze suma $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$.

c) Să se calculeze $\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{na_n}$.

❍2. Fie $(a_n)$ o progresie geometrică în care $a_3$ și $a_5$ sunt respectiv cea mai mică și cea mai mare soluție a ecuației $\frac{1}{2}\left[1+\log_4(3x-2)\right] = \log_4\left(1+\sqrt{10x-11}\right)$.

Să se calculeze suma $S = \sum_{k=1}^{9} a_k$.

*(Admitere ASE, București, 2002)*

❍3. Dacă numerele pozitive x, y, z sunt în progresie aritmetică cu rația r, iar x, $y+2$, $z+12$ sunt în progresie geometrică cu rația $r+1$, atunci $x+y+z$ este:

a) 12; b) $-12$; c) 9; d) 7; e) 15.

*(Admitere ASE, București, 2002)*

❍4. Să se calculeze limitele:

a) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{1}{n^2+2}+\ldots+\frac{1}{n^2+n}\right)$;

b) $\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot\cos n}{n^2+1}$;

c) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\ldots+\frac{1}{5^n}\right)$;

d) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+3n}-\sqrt{n^2-n}\right)$;

e) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{2n+1}+\frac{3n}{6n+1}\right)^{n+2}$.

❍5. Să se determine constantele reale astfel încât:

a) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+an}{n+2}-\frac{bn^2}{n+1}\right)=3$;

b) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{2n^2+5n+2}-\sqrt{an^2+bn+c}\right)=5\sqrt{2}$;

c) $\lim_{n\to\infty}\left(a+\frac{n+2}{bn^2+5n+4}\right)^{2n+1}=\frac{1}{e}$.

**O6.** **Să se determine $a\in\mathbb{R}$ pentru care funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ are limită în punctul specificat:**

a) $f(x)=\begin{cases}3x-4, & x\geq -1\\ (3a-1)x+1, & x<-1\end{cases}$, $x_0=-1$;

b) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{(3a-2)x^2-a}, & x<1\\ (2x-1)x-3, & x\geq 1\end{cases}$, $x_0=1$.

**O7.** **Să se calculeze:**

a) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x+3}{4x^2-5x+1}$;

b) $\lim_{x\to-1}\frac{3+x-2x^2}{(2x+2)(x+3)}$;

c) $\lim_{x\to} 4\frac{x-4}{\sqrt{2x+1}-3}$;

d) $\lim_{x\to 9}\frac{4-\sqrt{7+x}}{\sqrt{x}-3}$;

e) $\lim_{x\to 0}\frac{\cos 4x-\cos x}{\sin 2x\cdot\sin 3x}$;

f) $\lim_{x\to-3}\frac{x^2+x-6}{\operatorname{arctg}(x+3)}$;

g) $\lim_{x\to 2}\frac{3^x-9}{x-2}$;

h) $\lim_{x\to 0}\frac{3^x-2^x}{4^x-3^x}$;

i) $\lim_{x\to 0}\frac{\lg(1+6x)}{2x^2+x}$;

j) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin 2x)}{\ln(1+2\sin 3x)}$;

k) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5x-2}{x^2+x+1}\right)^{x+2}$;

l) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\sqrt{x^2+2x-3}}{x+2}\right)^{3-2x}$.

**O8.** **Să se determine asimptotele funcțiilor $f:D\to\mathbb{R}$:**

a) $f(x)=\frac{x^2}{4-x^2}$;

b) $f(x)=\frac{x^3-1}{x^2-3x}$;

c) $f(x)=\frac{x|x|}{x^2-1}$;

d) $f(x)=\frac{x^2e^{-x}}{x+3}$.

**O9.** **Să se calculeze limitele de șiruri:**

a) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n+2}+\frac{2}{n+4}+\frac{3}{n+6}+\ldots+\frac{n}{n+2n}\right)$;

b) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\sqrt[n]{e}+1}+\frac{1}{\sqrt[n]{e^2}+1}+\ldots+\frac{1}{\sqrt[n]{e^n}+1}\right)$;

c) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{2}{\sqrt{n^2+4}}+\ldots+\frac{n}{\sqrt{n^2+n^2}}\right)$.

# TEMA 6
## – Derivate. Primitive. Integrale –

**Noțiuni de recapitulat**

- derivata unei funcții într-un punct;
- reguli de derivare;
- teoremele lui Fermat, Rolle, Lagrange;
- șirul lui Rolle;
- regula lui l'Hospital;
- rolul derivatei întâi și a doua;
- graficul unei funcții;
- primitivele unei funcții;
- integrala definită;
- calculul ariei și volumului cu ajutorul integralei.

### SETUL 1 DE PROBLEME

**❍1.** Să se studieze continuitatea și derivabilitatea funcției $f : D \to \mathbb{R}$:

a) $f(x) = x|x|$;

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin x, & x \le 0 \\ \ln\left(1 + x^2\right), & x > 0 \end{cases}$;

c) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1}, & x \ge 1 \\ \arcsin x, & x \in [-1, 1) \end{cases}$.

**❍2.** Să se determine parametrii reali astfel încât funcția $f : D \to \mathbb{R}$ să fie derivabilă:

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax - 2, & x \in [1, 2) \\ bx^2 - 2x + c, & x \in (2, +\infty) \end{cases}$;

b) $f(x) = \begin{cases} a \operatorname{arctg} x + b, & x \le 0 \\ 2ax + 1, & x > 0 \end{cases}$.

**❍3.** Fie funcția $f : \mathbb{R} \setminus \{-3\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{mx + n}{x + 3}$, $m, n \in \mathbb{R}$. Să se determine m și n astfel încât punctul $A(3, -2) \in \mathcal{G}_f$, iar tangenta în punctul A să fie înclinată la $45°$ față de axa Ox.

**❍4.** Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \ln(3 - x), & x \le 2 \\ ax^2 - x(2a - b) + c, & x > 2 \end{cases}$.

a) Să se determine $a, b, c \in \mathbb{R}$ astfel încât f să fie de două ori derivabilă în $x = 2$.

b) Pentru $a = -\dfrac{1}{2}$ și $b = c = 0$ să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției în punctul A care are abscisa egală cu $18f''(0)$.

**❍5.** Să se calculeze derivata funcției $f : D \to \mathbb{R}$:

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 2x + 2}$;

b) $f(x) = x \ln\left(\dfrac{1 - x}{1 + x}\right)$;

c) $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x^2 + 2}{x^2 + 4}}$;

d) $f(x) = \ln\left(2x^2 + 2x + 1\right) - 4 \operatorname{arctg} \dfrac{x}{x + 1}$.

**❍6.** Fie $f : (1, +\infty) \to (3, +\infty)$, $f(x) = 3^x + x^2 - x$. Să se arate că f este funcție inversabilă și să se calculeze $\left(f^{-1}\right)'(11)$ și $\left(f^{-1}\right)'(33)$.

**❍7.** **Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2^x + a^x - 5^x - 6^x,\ a > 0$.**

**a) Să se calculeze $f(0)$ și $f'(0)$.**

**b) Să se determine a astfel încât $f(x) \geq 0,\ \forall\ x \in \mathbb{R}$.**

**❍8.** **Se dă funcția $f : [-2,\ 4] \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} ax^2 - 4x + b - 2, & x \in [-2,\ 0) \\ x^2 + (c-2)x + 1, & x \in [0,\ 4] \end{cases}$.**

**a) Să se determine $a, b, c \in \mathbb{R}$ astfel încât pentru funcția f să fie aplicabilă teorema lui Rolle.**

**b) Să se aplice teorema lui Rolle funcției f.**

**❍9.** **Să se determine numărul soluțiilor reale ale ecuațiilor algebrice:**

**a) $3x^4 - 8x^3 + 9x^2 - 36x + 1 = 0$;**

**b) $8x^5 - 10x^4 - 30x^3 + 45x^2 - m = 0,\ m \in \mathbb{R}$.**

**❍10.** **Folosind teorema lui Lagrange, să se rezolve:**

**a) $3^x + 10^x = 2^{2x} + 3^{2x}$;**

**b) $7^x + 4^x \geq 5^x + 6^x$.**

**c) $\arcsin \dfrac{2x}{x^2+1} + 2\,\mathrm{arctg}\, x = \pi$.**

**SETUL 2 DE PROBLEME**

**❍1.** **Folosind regula lui l'Hospital, să se calculeze:**

**a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln\left(1+e^{4x}\right)}{\ln\left(1+e^{2x}\right)}$;** **b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{100\cdot x^{102} - 101x^{101} + x}{(1-x)^2}$;**

**c) $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x>3}} (x-3)\,e^{\frac{1}{x^2-9}}$;** **d) $\lim\limits_{x\to -3}\left[\dfrac{1}{x+3} - \dfrac{1}{\ln(x+4)}\right]$.**

**❍2.** **Fie $I_n = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x^n - \sin 2x}{x^3}$, $n \in \mathbb{N}$, și p cel mai mic număr natural pentru care $I_p$ este număr real nenul. Dacă $M = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{1}{n} I_p\right)^n$, atunci:**

**a) $M = e\sqrt[3]{e}$;** **b) $M = -e\sqrt[3]{e}$;** **c) $M = 3e$;** **d) $M = 2\sqrt[3]{e}$.**

***(Admitere ASE, București, 2004)***

**❍3.** **Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcția polinomială de gradul trei.**

**a) Să se determine funcția știind că are un maxim local egal cu $-1$ în $x = 1$ și minim local egal cu $-2$ în $x = 2$.**

**b) Să se determine intervalele de monotonie ale funcției f.**

**c) Să se arate că punctele de extrem local și punctul de inflexiune ale graficului funcției f sunt coliniare.**

**d) Să se reprezinte grafic funcția $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = f(x) + 1$.**

**e) Să se calculeze aria suprafeței plane mărginite de graficului funcției g și axa Ox.**

**O4.** Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=2^x+2^{-x}$.

a) Să se verifice că $f(x)=f(-x),\ \forall\ x\in\mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $f'(x),\ x\in\mathbb{R}$.

c) Să se arate că f este strict descrescătoare pe $(-\infty,\ 0]$ și strict crescătoare pe $[0,\ +\infty)$.

d) Să se arate că funcția f este convexă pe $\mathbb{R}$.

e) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\int_0^x f(t)\,dt}{f(x)}$.

*(Bacalaureat, 2004)*

**O5.** Se consideră funcția $f:D\to\mathbb{R},\ f(x)=ax+\sqrt{bx^2+cx-1},\ a>0,\ b>0$.

a) Să se determine parametrii $a,\ b,\ c\in\mathbb{R}$, astfel încât dreapta $y=2x+1$ să fie asimptotă oblică spre $+\infty$, iar $y=-1$ să fie asimptotă orizontală spre $-\infty$.

b) Să se determine aria subgraficului funcției $g:\left[\dfrac{5}{6},\ \dfrac{5}{4}\right]\to\mathbb{R},\ g(x)=(x+1)f(x)$.

**O6.** Se consideră funcția $f:[-1,\ 2]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}ax^2+bx+c, & x\le 1\\ \ln\left(x^2-3x+3\right), & x>1\end{cases}$.

a) Să se determine $a,\ b,\ c\in\mathbb{R}$ astfel încât funcției f să i se poată aplica teorema lui Rolle.

b) Pentru $a=-c=-\dfrac{1}{2}$ și $b=0$ să se calculeze:

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left[f\left(\dfrac{1}{n}\right)+f\left(\dfrac{2}{n}\right)+\ldots+f\left(\dfrac{n}{n}\right)\right]$;

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left[f\left(1+\dfrac{1}{n}\right)+f\left(1+\dfrac{2}{n}\right)+\ldots+f\left(1+\dfrac{n}{n}\right)\right]$.

c) Să se calculeze $\int_1^2 f'\left(1+\dfrac{1}{x}\right)dx$.

**O7.** Fie funcțiile $f,\ g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2-ax$ și $g(x)=3ax-x^2,\ a\in[0,\ +\infty)$.

a) Să se studieze poziția paralelelor corespunzătoare funcțiilor f și g.

b) Să se calculeze aria suprafeței plane S, cuprinsă între cele două parabole.

c) Dacă A este punctul de intersecție a celor două paralele, diferit de origine, să se arate că dreapta OA împarte suprafața S în două suprafețe echivalente.

**O8.** Se consideră funcția $f_n:(0,\ +\infty)\to\mathbb{R},\ f_n(x)=\dfrac{(\ln x)^n}{x^2}$.

a) Să se rezolve inecuația $f_1(x)-f_2(x)>0$.

b) Să se calculeze aria suprafeței plane mărginite de graficele funcțiilor $f_1$ și $f_2$ și dreptele $x=1,\ x=e$.

c) Să se calculeze volumul corpului de rotație determinat de funcția $g : [1, e] \to \mathbb{R}$, $g(x) = x\sqrt{x}[f_1(x) - f_2(x)]$.

**❍9.** Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^{2006} + 1$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)\,dx$.

c) Să se arate că funcția f este convexă pe $\mathbb{R}$.

d) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$.

e) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\int_0^n \sin x\,dx$.

*(Bacalaureat, 2006)*

## TEMA 7
## – Structuri algebrice –

**Noțiuni de recapitulat**

- legi de compoziție – proprietăți:
- monoid;
- grup;
- morfisme de grupuri;
- inel;
- corp;
- morfisme de inele si corpuri;
- inele de polinoame.

**❍1.** Pe $\mathbb{R}$ se consideră legile de compoziție „$\circ$“ și „$\perp$“ definite astfel:
$x \circ y = x + y + 2$, $x \perp y = xy + x + y + a$, $\forall\ x, y \in \mathbb{R}$.

a) Să se studieze proprietățile legii „$\circ$“.

b) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât legea „$\perp$“ să fie asociativă.

c) Pentru $a = 0$ să se rezolve ecuațiile:
$(x^2 - 1) \circ (2x - 3) = 6$, $2^x \perp (2^x - 1) = 71$.

d) Să se rezolve sistemul de ecuații pentru $a = 0$:
$\begin{cases} (x+1) \circ (y+1) = 6 \\ (x+1) \perp (y-1) = 2 \end{cases}$.

e) Știind că $(-2) \perp 3 = -5$, să se arate că $\underbrace{2 \perp 2 \perp \ldots \perp 2}_{n \text{ ori}} = 2 \cdot \sum\limits_{k=0}^{n-1}\left[(-2) \circ 3^k\right]$, $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$.

**❍2.** Se consideră mulțimile:

$$G_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R});$$

$$G_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \right\} \subset S_4.$$

a) Să se stabilească tabla înmulțirii matricelor pe mulțimea $G_1$ și tabla compunerii permutărilor pe mulțimea $G_2$.

b) Să se arate că $(G_1, \cdot)$ este grup comutativ și $(G_2, \circ)$ este subgrup al grupului $(S_4, \circ)$.

c) Să se arate că $(G_1, \cdot) \simeq (G_2, \circ)$.

**O3.** **Se dă matricea** $A(a) = \begin{pmatrix} 1+5a & 3a \\ -\frac{25a}{3} & 1-5a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

**a) Să se arate că** $A(a)$ **este matrice inversabilă, oricare ar fi** $a \in \mathbb{R}$.

**b) Să se arate că** $A(a) \cdot A(b) = A(a+b)$, $\forall\ a, b \in \mathbb{R}$.

**c) Să se rezolve ecuația** $A(x+1)A(2) = A(1-x)A_3$.

**d) Să se rezolve sistemul de ecuații** $\begin{cases} A^2(x+3y) = A(-8) \\ A(2x+y)A(3) = A(2)A(y-x) \end{cases}$.

**e) Dacă** $G = \{A(a) \mid a \in \mathbb{R}\}$ **să se arate că** $(G, \cdot)$ **este grup comutativ.**

**f) Să se stabilească un izomorfism între grupurile** $(G, \cdot)$ **și** $((0, +\infty), \cdot)$.

**O4.** **Pentru orice** $n \in \mathbb{N}^*$ **se consideră mulțimea de numere raționale** $H_n = \left\{ \frac{k}{n!} \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

**a) Să se arate că dacă** $x, y \in H_n$, **atunci** $x + y \in H_n$.

**b) Să se verifice că dacă** $x \in H_n$, **atunci** $-x \in H_n$.

**c) Să se arate că dacă** $x \in H_n$, **atunci** $H_n \subset H_p$.

**d) Să se arate că pentru orice număr rațional r, există** $n \in \mathbb{N}^*$, **astfel încât** $r \in H_n$.

**e) Să se arate că dacă** $(G, +)$ **este subgrup al grupului** $(\mathbb{Q}, +)$ **și** $\frac{1}{n!} \in G$, $n \in \mathbb{N}^*$, **atunci** $H_n \subset G$.

**f) Să se demonstreze că dacă** $G_1, G_2, \ldots, G_{2002}$ **sunt subgrupuri ale grupului** $(\mathbb{Q}, +)$ **și** $\mathbb{Q} = G_1 \cup G_2 \cup \ldots \cup G_{2002}$, **atunci există** $i \in \{1, 2, \ldots, 2002\}$ **astfel încât** $G_i = \mathbb{Q}$.

***(Bacalaureat, 2002)***

**O5.** **Pe mulțimea** $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ **se definesc operațiile algebrice:**

$(a, b) + (c, d) = (a+c, b+d)$;

$(a, b) \cdot (c, d) = (ad + bc + 2ac, bd - ac)$.

**a) Să se arate că** $(A, \cdot)$ **este monoid și să se determine mulțimea** $\mathcal{U}(A)$.

**b) Să se arate că** $(A, +, \cdot)$ **este inel.**

**c) Inelul** $(A, +, \cdot)$ **are divizori ai lui zero?**

**O6.** **În mulțimea** $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ **se consideră matricele** $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ **și mulțimea** $G = \left\{ \begin{pmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{pmatrix} \,\middle|\, z, w \in \mathbb{C} \right\}$, **unde** $\overline{z}$ **este conjugatul numărului complex z.**

**a) Să se verifice că $I_2 \in G$ și $O_2 \in G$.**

**b) Să se arate că dacă $z, w \in \mathbb{C}$ și $|z|^2 + |w|^2 = 0$, atunci $z = w = 0$.**

**c) Să se arate că dacă $P, Q \in G$, atunci $P \cdot Q \in G$.**

**d) Să se arate că dacă $D \in G$, $D \neq O_2$, atunci D este matrice inversabilă și $D^{-1} \in G$.**

**e) Să se găsească o matrice $X \in G$ cu proprietatea că $XC \neq CX$, unde $C = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$.**

**f) Să se arate că dacă $A, B \in G$ și $A \cdot B = O_2$, atunci $A = O_2$ sau $B = O_2$.**

**g) Să se arate că $(G \setminus \{O_2\}, \cdot)$ este grup necomutativ.**

**h) Să se arate că $(G, +, \cdot)$ este grup necomutativ.**

***(Bacalaureat, 2004)***

**❍7. Se consideră polinomul $f \in \mathbb{C}[X]$, $f = (1 + X + X^2)^{10}$ cu forma sa algebrică $f = a_{20}X^{20} + \ldots + a_1X + a_0$.**

**a) Să se determine $a_0$ și $a_1$.**

**b) Să se calculeze $f(1)$, $f(-1)$, $f(i)$.**

**c) Să se calculeze suma coeficienților polinomului f.**

**d) Să se arate că $a_0 + a_4 + \ldots + a_{16} = \frac{1}{4}[f(1) + f(-1) + f(i) + f(-i)]$.**

***(Bacalaureat, 2000)***

**❍8. Fie $f \in \mathbb{C}[X]$ un polinom de gradul $n \in \mathbb{N}^*$.**

**a) Să se determine f știind că funcția polinomială atașată verifică egalitatea $f(x) - f'(x) = \frac{x^n}{n!}$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$, (1).**

**b) Să se arate că dacă f verifică relația (1) atunci nu poate avea rădăcini reale multiple.**

**c) Dacă f verifică relația (1) să se calculeze $\lim_{n \to \infty} f(1)$.**

**d) Să se rezolve în mulțimea $\mathbb{C}$ ecuația $f(x) + 12 = 0$ pentru $n = 4$.**

**❍9. Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se consideră operațiile algebrice $x \perp y = x + y - 1$, $x \top y = 2xy - 2(x + y) + a$, $\forall\ x, y \in \mathbb{R}$.**

**a) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ pentru care $(\mathbb{R}, \perp, \top)$ este inel.**

**b) Pentru $a \in \mathbb{R}$ determinat să se stabilească $\mathcal{U}(\mathbb{R})$.**

**c) Să se afle $m, n \in \mathbb{R}$ pentru care $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + n$ este izomorfism între corpurile $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ și $(\mathbb{R}, \perp, \top)$.**

# INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI

## – ALGEBRĂ –

**CAPITOLUL I. Grupuri**
**1. Legi de compoziție pe o mulțime**
**1.5. Tabla unei legi de compoziție (pag. 12)**

• **E2. a)** $a = 0,\ a = 1,5.$ • **E5. c)** $x \in \{\hat{1}, \hat{2}\}$; **d)** $x \in \{\hat{2}, \hat{4}\}$. • **E6. a)** $x \in \left\{0, \frac{2}{3}\right\}$. **b)** $x = 2,\ y = 3.$ • **E9. a)** Avem $x, y \in [2, \infty) \Rightarrow x - 2 \geq 0,\ y - 2 \geq 0 \Rightarrow (x-2)(y-2) \geq$ $\geq 0 \Rightarrow xy - 2x - 2y + 4 \geq 0 \Rightarrow x \circ y \geq 2.$ **c)** Se are în vedere că $\det(A) = a^2 - 2b^2 = 1$ și $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$. • **E11. a)** $\text{card}(\mathcal{M}) = 6$; **b)** Se arată că $A^m \perp A^n =$ $= A^{m+n}$.

• **A2. b)** Din $x, y \in [4, 6]$ se obține că $x - 5,\ y - 5 \in [-1, 1]$ sau $|x-5| \leq 1,\ |y-5| \leq$ $\leq 1$. Așadar $|(x-5)(y-5)| \leq 1$ și $-1 \leq xy - 5x - 5y + 25 \leq 1$, de unde rezultă că $4 \leq x \circ y \leq 6$. • **A3.** Avem $x, y > 2 \Rightarrow (x-2)(y-2) > 0 \Rightarrow xy - 2(x+y) + 4 > 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow xy - 2 - 2(x+y-3) > 0 \Rightarrow xy - 2 > 2(x+y-3) \Rightarrow x \circ y > 2.$ • **A6. a)** $x \circ y =$ $= (x-2)(y-2) + 2 + (a-2) > 2$, pentru $a \in [2, +\infty)$; **c)** $x = \frac{17}{8},\ y = 5.$

• **A8.** Fie $M \subset \mathbb{R}$ parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ și $x \in M$. Atunci $x^n \in M,\ \forall\ n \in \mathbb{N}^*$. Deoarece M este finită există $m, n \in \mathbb{N}^*$, cu $x^m = x^n$ sau $x^m - x^n = 0$. Se obține că $x = 0$ sau $x^{m-n} = 1$. Se obțin mulțimile $\{0\}, \{1\}, \{0, 1\}, \{-1, 1\}, \{-1, 0, 1\}$. Dacă $M \subset \mathbb{C}$ avem că $x = 0$ sau $x^p = 1$, deci M poate fi $\{0\}$, $\mathcal{U}_n$ și $\mathcal{U}_n \cup \{0\}$, unde $\mathcal{U}_n$ este mulțimea rădăcinilor de ordinul n ale unității. • **A9.** $3^9$, respectiv $n^{n^2}$ legi de compoziție.

**2.2. Proprietatea de asociativitate (pag. 20)**

• **E3. a)** $a = c = 1,\ b \in \mathbb{Z}$; **b)** $a = 2,\ b = 2$; **d)** $a = b = 1$. • **E5. b)** $a + 3b = 3 \Rightarrow (a, b) \in$ $\in \{(3, 0), (0, 1)\}$.

• **A1. c)** $x = 0$. • **A4. a)** $a = b = 0$ sau $a = 1,\ b \in \mathbb{R}$. **b)** Deoarece $AB = BA$, avem $A \circ B = (a+b)AB$ și $a, b \in \mathbb{R}$. **c)** $a \in \mathbb{R}$. • **A5. a)** $ax = xa,\ \forall\ x \in M$; **b)** $a \in M$; **c)** $ax = xa,\ \forall\ x \in M$; **d)** $ax = xa,\ \forall\ x \in M$. • **A6.** $n^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

**2.4. Elemente simetrizabile (pag. 27)**

• **E1. a)** $e = 0$; **b)** $e = -1$; **c)** $e = 3$; **d)** $e = 0$; **e)** $e = \hat{3}$. • **E2. a)** $e = -2$; **b)** $e = 8$; **c)** $e = \frac{1}{2}$; **d)** $e = 2^{\frac{1}{9}}$.

• **A1. a)** $a=-1$; **b)** $a=5$; **c)** $a=30$. • **A4.** $a=b=0$ sau $a=-1,\ b=1$.

• **A7.** $\mathscr{U}(\mathbb{Z}[i])=\mathbb{Z}[i]$, $\mathscr{U}(\mathscr{M})=\{-1,\ 1\}\in\mathscr{U}_2$.

**Exerciții și probleme recapitulative (pag. 28)**

• **A3. a)** Dacă $f\in\mathscr{F}(M)$ și $f'\in\mathscr{F}(M)$ cu $f\circ f'=1_M=f'\circ f$ atunci f este surjectivă și $f'$ injectivă, respectiv $f'$ este surjectivă și f injectivă. Așadar f este bijectivă. În concluzie, f este funcție bijectivă. • **A4. c)** $\mathscr{U}(\mathscr{F})=\mathscr{F}$. • **A8.** Se arată că $f_a\circ f_b=f_{ab}$.

**3. Noțiunea de grup. Exemple (pag. 45)**

• **E5.** $(G,\ \perp)$. • **E6.** $(G_2,\ \cdot)$. • **E8. b)** Se arată că $A^3=I_3,\ \forall\ A\in M$ și $A\perp B=A+B+\hat{2}I_3$. • **E9. a)** Avem $\varepsilon(\sigma\delta)=\varepsilon(\sigma)\cdot\varepsilon(\delta)=1\cdot1=1$, deci $\sigma\delta$ este permutare pară. **b)** Avem $\operatorname{card}(A_n)=\frac{1}{2}n!$, pentru $n\geq2$. Grupul este comutativ pentru $n\in\{1,\ 2,\ 3\}$. Pentru $n\geq4$, avem $\sigma\delta\neq\delta\sigma$, unde $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&\dots&n\\4&3&2&1&5&\dots&n\end{pmatrix}$, $\delta=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&\dots&n\\3&4&1&2&5&\dots&n\end{pmatrix}$.

**4. Reguli de calcul într-un grup (pag. 51)**

• **E1. b)** $(1+i)^2=2,\ (1-i)^2=2,\ i^5=5-4i$. • **E2.** $A^n=\begin{pmatrix}1&2na\\0&1\end{pmatrix}$. • **E3. b)** $x^n=2^{(\log_2 x)^n}$. • **E4. b)** $x^n=(x-4)^n+4$. • **E5. c)** Inducție matematică. • **E6. c)** $x^n=ab^na^{-1}$.

• **A1.** Inducție matematică. • **A2. a)** Rezultă succesiv $a=b^2=\left(a^2\right)^2=a^4$ și cu legea simplificării se obține că $a^3=e$ și analog $b^3=e$. Așadar $x^2=(aba)(aba)=abbba=ab^3a=a^2$ și $x^3=aba\cdot a^2=ab=a\cdot a^2=e$. • **A3.** Avem $ab=e\Rightarrow a=b^{-1}\Rightarrow ba=bb^{-1}\Rightarrow ba=e$. • **A4.** $ab^2=e\Rightarrow ab=b^{-1}\Rightarrow bab=e\Rightarrow ba=b^{-1}$, deci $ab=b^{-1}=ba$. • **A10. a)** $x^2=e\Rightarrow x=x^{-1}$. Atunci $xy=x^{-1}\cdot y^{-1}=(yx)^{-1}=yx$.

**b)** Avem $(xy)^2=x^2y^2\Rightarrow xy\cdot xy=xxyy$ și după simplificări se obține $yx=xy$.

**c)** $(xy)^{-1}=x^{-1}y^{-1}\Rightarrow y^{-1}x^{-1}=x^{-1}y^{-1}\Rightarrow x^{-1}=yx^{-1}y^{-1}\Rightarrow x^{-1}y=yx^{-1}\Rightarrow yx=xy$.

**d)** Pentru $y=x^{-2}$ se obține că $xx^{-2}=x^{-2}x^{-1}\Rightarrow x=x^{-1}$ sau $x^2=e$.

**g)** Pentru $y=x^{-2}\Rightarrow xx^{-2}=x^{-1}x^{-2}\Rightarrow x^6=e$, iar pentru $y=x^{-1}$ se obține $x^4=e$. Astfel $x^6=x^4$, deci $x^2=e$ etc.

• **D3.** Din $(m,\ n)=1$ se obține că există $p,\ q\in\mathbb{Z}$ astfel încât $1=mp+nq$. Rezultă $xy=(xy)^{mp+nq}=\left((xy)^m\right)^p\cdot\left((xy)^n\right)^q=\left((yx)^m\right)^p\cdot\left((yx)^n\right)^q=(yx)^{mp+nq}=yx$.

**5. Morfisme de grupuri (pag. 57)**

• **E6.** $a = 1,\ b = 2.$ • **E10.** $f(x) = ax.$ • **A1.** $f(a) = A(a).$ • **A2.** $f(a) = A(a).$

• **A3.** $\mathscr{M} = \{I_3,\ A,\ A^2\}$ și $\mathscr{M} \simeq \mathscr{U}_3.$ • **A4.** $a = 1,\ b = 3.$

• **A5.** $f : G_2 \to G_1,\ f(\cos\alpha + i\sin\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$ • **A7.** $f(x) = \operatorname{tg} x.$

• **A8.** $a = b = 1.$ • **A10.** $f(xy) = f(x)\cdot f(y) \Leftrightarrow (xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1} \Leftrightarrow xy = yx.$

• **A11.** $f : \mathbb{R} \to \mathscr{F},\ f(a) = f_a.$

**6. Subgrupuri (pag. 64)**

• **E1.** Dacă $x \in M,\ x = 2^n \Rightarrow x' = 2^{-n}.$ Dacă $x,\ y \in M,$ atunci $x = 2^m,\ y = 2^n$ și $xy' = 2^m \cdot 2^{-n} = 2^{m-n} \in M.$ • **E4. b)** Avem $\hat{x} = x \cdot \hat{1} \in A.$ • **E7.** $0 \in M,$ deoarece $2 \cdot (-3) + 3 \cdot 2 = 0.$ Fie $z \in M,\ z = 2x + 3y.$ Opusul este $-z = 2\cdot(-x) + 3\cdot(-y).$ Dacă $a,\ b \in M,$ atunci $a + (-b) = (2x + 3y) + 2\cdot(-x_1) + 3\cdot(-y_1) = 2(x - x_1) + 3(y - y_1) \in M.$ • **A1.** Fie $H = H_1 \cup H_2.$ Deoarece H este grup, el nu se poate scrie ca reuniune de două subgrupuri proprii. Rezultă că $H_1$ sau $H_2$ sunt subgrupuri improprii, deci $H_1 = G$ sau $H_2 = G.$ • **A2.** $e_2 = f(e_1) \in f(H).$ Fie $a,\ b \in f(H);$ atunci există $x,\ y \in H,$ astfel încât $a = f(x),\ b = f(y)$ și $ab^{-1} = f(x)\cdot(f(y))^{-1} = f(x)\cdot f(y^{-1}) = f(xy^{-1}),$ deci $ab^{-1} \in f(H).$ • **A4.** $e \in H,$ deoarece $e^2 = e.$ Fie $x,\ y \in H;$ atunci $x^2 = e,\ y^2 = e,$ iar $(xy^{-1})^2 = xy^{-1}xy^{-1}$ poate să nu aparțină lui H. Exemplu: $G = \mathscr{U}(\mathscr{M}_2(\mathbb{R})),\ H = \{A \in G \mid A^2 = I_2\}.$ Avem: $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ Y = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ X,\ Y \in H,$ dar $XY = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ și $(XY)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \notin H.$ • **A5.** Fie $x \in H$ și $a \in G \setminus H$ fixat. Atunci $ax \in G \setminus H$ și $f(ax) = g(ax).$ Rezultă că $f(a)\cdot f(x) = g(a)\cdot g(x)$ și după simplificare, $f(x) = g(x),\ x \in H,$ deci $f = g$ pe G. • **A6.** Fie $(G, +)$ cu proprietatea cerută. Pentru $x \in G,$ avem: $f(x + (-x)) = f(0) = 1,$ deci $f(x)\cdot f(-x) = 1$ și se obține că $\sin\frac{(2x+1)\pi}{2} \cdot \sin\frac{(1-2x)\pi}{2} = 1.$ De aici rezultă că $\cos 2\pi x = 1$ și $x \in \mathbb{Z},$ deci $G \subset \mathbb{Z},$ de unde $G = n\mathbb{Z}.$ • **A8.** Avem $f(0) = \hat{0}$ și $f(x) = xf(1).$ Dacă $x \in \operatorname{Ker} f,$ atunci $f(x) = \hat{0}$ și de aici $xf(\hat{1}) = \hat{0}.$ Pentru $x \neq 0$ se obține $f(1) = \hat{0}$ și astfel $\operatorname{Ker} f = \mathbb{Z},$ deoarece $f(x) = xf(1).$

**7. Grupuri finite (pag. 71)**

• **A1. a)** Dacă există $x \in G$ cu $x^n = e$, atunci $G = \langle x \rangle$ și G este comutativ. **b)** Fie $p = \text{ord}(x)$; atunci $p \mid n$ și avem $n = pq$, $x^n = x^{pq} = (x^p)^q = e$. • **A4.** Rezultă că $(x^2)^3 = x^6 = e$ și $(yx)^2 = yxyx = y(y^3x)x = y^4x^2 = x^2$. Așadar $(yx)^2$ are ordinul 3, iar $yx$ ordinul 6. Dar $(yx)^3 = yx(yx)^2 = yx \cdot x^2 = yx^3 = y$ și de aici $y^2 = e$. Din relația dată $xy = y^3x \Rightarrow xy = yx$.

**CAPITOLUL II. Inele și corpuri**

**1. Definiții și exemple (pag. 84)**

• **E2. b)** $\mathscr{U}(\mathbb{Z}) = \{-1, -3\}$. • **A2.** $b = 3 - 3a$. • **A4.** $\mathscr{U}(M) = (0, +\infty) \setminus \{1\}$.

**2. Reguli de calcul într-un inel (pag. 90)**

• **E2.** $f(x) = \begin{cases} 1, & x \le 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$. Avem $f \cdot g = 0$, $\forall\ x \in \mathbb{Z}$, respectiv $x \in \mathbb{R}$.

• **E3. b)** $\mathscr{U}(E) = E \setminus \{(0, 0)\}$. • **E7.** Se are în vedere că $-\hat{2} = \hat{2}$.

• **A3.** Din relațiile $(1 - ab)x^{-1} = 1$ și $x^{-1}(1 - ab) = 1$ se obține $x^{-1} - 1 = abx^{-1} = x^{-1}ab$. Avem $(1 - ba)(1 + bx^{-1}a) = 1 + bx^{-1}a - ba - babx^{-1}a = b(x^{-1} - 1)a + 1 - babx^{-1}a = b \cdot (abx^{-1})a + 1 - babx^{-1}a = babx^{-1}a + 1 - babx^{-1}a = 1$. • **A5.** Avem $1 = 1 - a^n = (1 - a)(1 + a + a^2 + \ldots + a^{n-1})$. • **A6. a)** Obținem $(-x)^2 = -x$ și $x^2 = x$, deci $x = -x$, $\forall\ x \in A$, sau $x + x = 0$. **b)** $(x + y)^2 = x + y \Leftrightarrow x^2 + xy + yx + y^2 = x + y \Leftrightarrow xy + yx = 0 \Leftrightarrow xy = -yx = yx$. • **A7. a)** Avem $x^6 = x$ și $(-x)^6 = -x$, deci $x = -x$ sau $x + x = 0$, $\forall\ x \in A$. Rezultă că $(x + 1)^6 = x + 1 \Rightarrow x^6 + 6x^5 + 15x^4 + 20x^3 + 15x^2 + 6x + 1$ sau $x^6 + x^4 + x^2 + 1 = x + 1 \Rightarrow x^4 + x^2 = 0 \Rightarrow x^4 = -x^2 \Rightarrow x^6 = -x^4 = -x^2$. Dar $x^6 = x \Rightarrow x = -x^2 \Rightarrow x = x^2$, deci inelul A este boolean și este comutativ. • **A8.** Din problema A3 proprietatea are loc pentru $n = 1$. Presupunem că $1 - (ab)^n \in \mathscr{U}(A)$. Atunci $1 - (ba)^n \in \mathscr{U}(A)$. Arătăm că $P(n + 1)$ este adevărată. Avem: $1 - (ab)^{n+1} \in \mathscr{U}(A)$. Luând $x = b(ab)^n \Rightarrow 1 - (ab)^{n+1} = 1 - ax \in \mathscr{U}(A)$, deci $1 - xa \in \mathscr{U}(A)$. Dar $1 - xa = 1 - b(ab)^n a = 1 - (ba)^{n+1}$ și astfel $1 - (ba)^{n+1} \in \mathscr{U}(A)$.

• **D2.** Se are în vedere că din $1 + 1 = 0$ rezultă $a + a = 0$, $\forall\ a \in A$. • **D3.** Din egalitatea $(1 + 1)(1 + 1) = 1 + 1 + 1 + 1 = 0$ rezultă că $1 + 1$ este divizor al lui zero. Dar $1 + 1 \ne 0$, altfel ar rezulta că inelul A are caracteristica 2. • **D4.** Dacă n nu este prim, atunci $n = p \cdot q$ și avem $p \cdot q = n \cdot 1 = 0$, deci inelul are divizori ai lui zero, în contradicție cu ipoteza.

**3. Corpuri (pag. 94)**

• **A4. a)** Se arată ușor că $ab \notin \{0, a, b\}$, deci $ab = 1$, $a = b^{-1}, b = a^{-1}$. Avem $1 = (ab)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}$ și de aici $ba = 1$. **b), c)** $\mathcal{U}(K) = \{1, a, b\}$, deci $ord(a) = 3$, $ord(b) = 3$. Rezultă că $a^3 = 1, b^3 = 1$. Din relația $a^3 = 1 \Rightarrow a^2 = a^{-1} = b$. **d)** $a^3 = 1 \Rightarrow a^3 - 1 = 0 \Rightarrow (a-1)(a^2 + a + 1) = 0$. Cum $a - 1 \neq 0$, rezultă că $a^2 + a + 1 = 0$. Analog $b^2 + b + 1 = 0$. **e)** Fie $x = 1 + 1$. Atunci $x^2 = 1 + 1 + 1 + 1 = 0$. Dar K este corp, deci rezultă că $x = 0$, adică $1 + 1 = 0$.

**4. Morfisme de inele și corpuri (pag. 100)**

• **A3.** Din egalitățile $f(x+y) = f(x) + f(y)$ și $f(xy) = f(x) \cdot f(y)$, $\forall$ $x, y \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, rezultă că $f(nx) = nf(x)$, $\forall$ $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, $n \in \mathbb{Z}$, și $f(n) = nf(1)$, $\forall$ $n \in \mathbb{Z}$.
Atunci $f(x + y\sqrt{2}) = f(x) + f(y) \cdot f(\sqrt{2}) = x + yf(\sqrt{2})$. Așadar izomorfismul este caracterizat de valorile lui $f(\sqrt{2})$. Dar $2 = f(2) = f(\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}) = (f(\sqrt{2}))^2$, deci $f(\sqrt{2}) = \pm\sqrt{2}$. Dar $\pm\sqrt{2} \notin \mathbb{Z}[\sqrt{3}]$, deci nu există f. • **A4. a)** Avem $\mathcal{U}(\mathbb{Z}) = \{-1, 1\}$, iar $\mathcal{U}(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}^*$, deci inelele nu sunt izomorfe. **b)** $\mathbb{Q}$ și $\mathbb{R}$ nu sunt cardinal echivalente. **c)** Se arată că $f(x) = x$, $\forall$ $x \in \mathbb{Q}$, deci f nu este surjectivă. • **A7.** Fie $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$, $n \geq 2$, morfism de inele. În particular f este morfism de grupuri, deci are forma $f(m) = mf(1)$. Deoarece $f(1) = \hat{1}$, rezultă că $f(m) = \widehat{m}$, $\forall$ $m \in \mathbb{Z}$.
**c)** Fie $f : \mathbb{Z}_m \to \mathbb{Z}_n$, morfism de inele. Din relația $f(x+y) = f(x) + f(y)$, $x, y \in \mathbb{Z}_m$, rezultă că $f(px) = pf(x)$, $\forall$ $x \in \mathbb{Z}_m$, și $f(\hat{x}) = xf(\hat{1})$, $x \in \mathbb{Z}_m$.

**CAPITOLUL III. Inele de polinoame**

**3.1. Adunarea și înmulțirea polinoamelor scrise sub formă algebrică (pag. 112)**

• **E2. a)** Pentru $m = 1$, $grad(f) = 0$, iar pentru $m \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $grad(f) = 1$. **b)** $m = 1 \Rightarrow grad(f) = 0$, $m = 2 \Rightarrow grad(f) = 1$, $m \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\} \Rightarrow grad(f) = 2$.

• **E3. b)** $m = \hat{1} \Rightarrow grad(f) = 1$, $m = \hat{0} \Rightarrow grad(f) = 0$, $m = \hat{2} \Rightarrow grad(f) = 2$. **e)** $m = 0 \Rightarrow grad(f) = 1$, $m \in \{i, -i\} \Rightarrow grad(f) = 2$, $m \in \mathbb{C} \setminus \{-i, 0, i\} \Rightarrow grad(f) = 3$.

• **E10. a)** $f = X - 1$, $g = 1$.

• **A8.** Avem $f(\hat{0}) = g(\hat{0})$, $f(\hat{1}) = g(\hat{1})$, $f(\hat{2}) = g(\hat{2})$. Rezultă că $a = \hat{2}$, $b + c = \hat{1}$, $2b + c = \hat{0}$, cu soluțiile $a = \hat{2}$, $b = \hat{2}$, $c = \hat{2}$. • **A9.** $g = a + bX + cX^2 + dX^3$. Din condiția de egalitate se obține $a = \hat{1}$, $a + b + c + d = \hat{2}$, $a + \hat{2}b + \hat{4}c + \hat{3}d = \hat{2}$, $a + \hat{3}b + \hat{4}c + \hat{2}d = \hat{3}$, $a - b + c - d = \hat{2}$. Se obține $a = \hat{1}$, $b = \hat{3}$, $c = \hat{1}$, $d = \hat{2}$. • **A14. a)** Dacă f este

funcție polinomială, atunci și $f^2 = |x|^2$ este funcție polinomială. Rezultă că $f^2 = x^2$, deci f are gradul 1. Dacă $f(x) = ax + b \Rightarrow ax + b = |x|, \forall\ x \in \mathbb{R}$. Pentru $x = 0 \Rightarrow b = 0$ și pentru $x = 1 \Rightarrow a = 1$. Dar $f(x) = x \neq |x|$. **b)** Avem că $|x| = f(x) - x^2$, deci $|x|$ ar fi funcție polinomială. **c)** Dacă f ar fi funcție polinomială, atunci și $|z| = f(z) - z^2$ ar fi funcție polinomială. Dar dacă $g(z) = |z|$, atunci pentru $x \in \mathbb{R}$, ar rezulta că $g(x) = |x|$ este funcție polinomială. Fals. **d)** Dacă $(K, +, \cdot)$ este corp finit atunci orice funcție $f: K \to K$ este polinomială. Într-adevăr, fie $K = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Luând $f: K \to K$, atunci alegem polinomul g de gradul $n-1$, astfel încât $g(x_i) = f(x_i)$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Sistemul verificat de coeficienții polinomului g, este sistem de tip Cramer, deoarece determinantul său este de tip Vandermonde.

### 3.2. Împărțirea polinoamelor (pag. 118)

• **A2. a)** $a = -\frac{7}{16}$; **b)** $a = 2,\ b = -2$; **c)** $a = -2,\ b = 0$; **d)** $a = \hat{0}$; **e)** $a = \hat{0},\ b = \hat{2}$.

• **A3.** Restul este de forma $r = aX + b$, iar $r(n) = an + b$ care este progresie aritmetică. • **A5.** $a = m,\ b = 1,\ c = 2 - m,\ d = 1,\ m \in \mathbb{R}$. • **A7.** $a = 6,\ b = 5,\ f = X^3 - 9X^2 + 22X + m$.

### 3.3. Împărțirea la X – a. Schema lui Horner (pag. 123)

• **A1.** Se pune condiția $f(-i) \in \mathbb{R}$. Se obține: **a)** $m = 1$; **b)** $m \in \{-3, 3\}$. • **A4.** $m = 6,\ n = -2$. • **A6.** $a = \hat{0},\ b = \hat{2}$. • **A7.** Din $f(2) = -12$ se obține $n = 4$, apoi $r = -76$. • **A8.** Avem $2^m + 2^n + 1 = 13$ și $4^m + 4^n + 1 = 81$. Se obține $m = 3,\ n = 2$ sau $m = 2,\ n = 3$ și $f = X^3 + X^2 + 1$. • **A10.** $a = \hat{0},\ b = \hat{1}$. • **A11.** Folosind formula lui Moivre se obține că $\sin\alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha + \sin 4\alpha = 1 + \sqrt{2}$ și $\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + \cos 4\alpha = -1$. A doua relație se scrie $\cos 2\alpha + 2\cos^2 2\alpha - 1 + 2\cos 2\alpha \cdot \cos\alpha = -1$ sau $\cos 2\alpha(1 + 2\cos 2\alpha + 2\cos\alpha) = 0$ cu soluția $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

### 4. Divizibilitatea polinoamelor (pag. 133)

• **E4. a)** $m = -3$; **b)** $m = \frac{65}{38}$; **c)** $m = \hat{2}$; **d)** $m = \hat{3}$.

• **A1. a)** $a \in \{\hat{1}, \hat{2}\}$; **b)** $a = \hat{0}$; **c)** $(a, b) \in \{(\hat{1}, \hat{0}), (\hat{2}, \hat{1}), (\hat{0}, \hat{2})\}$; **d)** $a = \hat{1}$; **e)** $a + b^2 = \hat{2}$. • **A3.** Se pune condiția ca $f(\varepsilon) = 0$, unde $\varepsilon^3 = 1,\ \varepsilon \neq 1$. Se obține $m = 2$.

• **A4.** $m \in \{0, 1, 3\}$. • **A6.** $f = a(X^3 - 9X^2 + 26X + 36)$. • **A7.** Se obține $aX^3 + bX^2 + cX + d = (3aX^2 + 2bX + c)\left(\frac{X}{3} + \alpha\right)$ și apoi $b = 3a\alpha,\ c = 9a\alpha^2,\ d = 27a\alpha^3$.

• **A8.** $m \in \{0, 2\}$. • **A11.** Avem $f = \left(g + X^n\right)^2 - X^n = g^2 + 2gX^n + X^{2n} - X^n$ și se arată că $X^{2n} - X^n = X^n (X - 1) g$. • **A12. a)** $f = (g + X)^{4n+1} + (g - X)^{4n+1} = (g + X + {}$ $+ g - X) \cdot Q = 2g \cdot Q$. **b)** Deoarece $X - 1 = X^2 - g$ se obține: $f = \left(X^2 - g\right)^{n+2} + X^{2n+1} =$ $= g \cdot h + \left(X^2\right)^{n+2} + X^{2n+1} = g \cdot h + X^{2n+4} + X^{2n+1} = g \cdot h + X^{2n+1}\left(X^3 + 1\right) = g \cdot h + X^{2n+1} \cdot$ $\cdot (X + 1) g$. **d)** $f = \left(X^3 + 3X^2 + 3X + 1\right)^n \cdot (X + 1)^2 + X + 2 = (Xg + 1)^n \cdot \left(X^2 + 2x + 1\right) +$ $+ X + 2 = g \cdot h + \left(X^2 + 2x + 1\right) + X + 2 = g \cdot h + g$. • **A13.** $f = X^m + \left(X^2 - g\right)^m + 1 = X^m +$ $+ X^{2m} + g \cdot h + 1$. Se consideră apoi $m = 3k$, $m = 3k + 1$, $m = 3k + 2$ etc.

**5. Descompunerea polinoamelor în factori ireductibili (pag. 144)**

• **E3. a)** $a = \hat{0}$; **b)** $a = \hat{2}$; **c)** $a = \hat{0}, b = \hat{0}$.

• **A1. a)** Dacă $x \in \mathbb{Q}$, atunci $f(x) = \left(2x^3 + 3x^2 + x\right) + \left(x^3 + 2x + 3\right)\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$, implică $x^3 + 2x + 3 = 0$ și $x = -1$ etc. **b)** Dacă $x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 3 + i\left(x^2 - 2x - 3\right) =$ $= 0$, dacă $x^2 - 2x - 3 = 0$, deci $x \in \{-1, 3\}$ etc. **c)** Rezultă că $x^2 + 2mx - 6 = 0$ și $2x^2 - x - m = 0$, de unde $4x^3 - x^2 - 3 = 0$, $x = 1 \in \mathbb{R}$, iar $m = 1$. • **A2. a)** $a \in \{-2, 1\}$; **b)** $a \in \left\{0, -1, 3, -\frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right\}$. • **A4.** $m = 3$. • **A5.** $a = -\frac{4}{3}$, $b = 3$, $c = -\frac{5}{3}$. • **A6.** Cu schema lui Horner se obțin relațiile $\alpha^3 - 5\alpha^2 + 8\alpha + a = 0$ și $3\alpha^2 - 10\alpha + 8 = 0$, cu soluții $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = \frac{4}{3}$, etc. • **A7. a)** $a = 12$, $b = -8$. • **A8.** Avem $f\left(\hat{0}\right) = a + \hat{1}$, $f\left(\hat{1}\right) = \hat{1} \neq \hat{0}$, $f\left(\hat{2}\right) = a + \hat{1}$. Se obține că $a + \hat{1} = \hat{0}$, deci $a = -\hat{1}$. • **A9.** $n = 2$. • **A11.** Se pune condiția ca $f\left(\hat{1}\right) \neq \hat{0}$, $f\left(\hat{2}\right) \neq \hat{0}$. Se obține $a + b = \hat{0}$, deci $a = \hat{1}, b = \hat{2}$ sau $a = \hat{2}, b = \hat{1}$. • **A13. a)** $a = \hat{2}$; **b)** Pentru $a \in \left\{\hat{0}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}, \hat{5}, \hat{6}, \hat{7}\right\}$, polinomul are soluții în $\mathbb{Z}_6$. Rămâne de analizat cazul $a = \hat{1}$. • **A15.** Dacă f ar fi reductibil peste $\mathbb{Z}$ atunci am avea că $f = (X + m)\left(X^2 + pX + q\right)$, cu $p, q, m \in \mathbb{Z}$, de unde identificând coeficienții se obține $b = p + m$, $c = q + mp$, $a = qm$ și $ab + bc = qm \cdot$ $\cdot (p + q + m + mp)$. Dar $ab + bc =$ impar conduce la q și m impare și $p + q + m +$ $+ mp =$ par și egalitatea nu poate avea loc. • **A16.** Presupunem că f este reductibil peste $\mathbb{Z}$. Atunci avem că $f = g \cdot h$ cu g, h cu coeficienți în $\mathbb{Z}$ de gradul cel puțin 1. Obținem: $g(1) \cdot h(1) = -1$, $g(2) \cdot h(2) = -1$, $g(3) \cdot h(3) = -1$ și de aici rezultă că funcțiile polinomiale g sau h au cel puțin două valori egale cu 1 sau cu $-1$. Dar unul dintre polinoamele g sau h are gradul 1, și atunci el ar fi constant,

ceea ce nu se poate. • **A19.** Vom avea că $\tilde{f}(n) = n^3 - (n-1)^3 = 3n^2 - 3n + 1$, $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, deci polinomul $g = f - 3X^2 + 3X - 1$ are ca rădăcini orice număr $n \in \mathbb{N}^*$. Așadar el este polinomul nul, deci $f = 3X^2 - 3X + 1$.

**6. Relațiile lui Viète (pag. 151)**

• **E2. a)** $f = (X + \hat{1})^4$; **b)** $f = (X + \hat{1})^3$; **c)** $f = (X + \hat{1})^5$; **d)** $f = (X - \hat{1})(X^2 - \hat{4})$.

• **E3. a)** $\left\{\frac{2}{3}, 1, -4\right\}$; **b)** $\left\{-\frac{3}{5}, 1, 5\right\}$; **c)** $\{6, 2, -1\}$; **d)** $\{1, 3, 6\}$. • **E5. a)** Se obține $z_3 = 6$ și se folosește schema lui Horner. $a = -5$. **b)** Din $z_1 z_2 z_3 = 6$ se obține $z_1 \in \{-6, 6\}$ etc. **c)** $z_3 = 4,\ a = 37$. • **A2. a)** $z_3 = -m$. Apoi $m = -1,\ z_1 = 2,$ $z_2 = -2$. **b)** $a = -5$; **c)** $a = -5$. • **A3. a)** $m = 9,\ x \in \left\{2 - \sqrt{3},\ 2,\ 2 + \sqrt{3}\right\}$. **b)** Din relațiile $x_1 + x_2 + x_3 = 3m$ și $x_1 + x_3 = 2x_2$ se obține $x_2 = m$. Prin schema lui Horner se obține $m^3 - 3m + 2 = 0$ cu soluțiile $m \in \{1, -2\}$ etc. **c)** Se consideră $z_1 = a - 3r,\ z_2 = a - r,\ z_3 = a + r,\ z_4 = a + 3r$. Se obține că $10 = z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = = 4a$, deci $a = \frac{5}{2}$. Din relația $z_1 z_2 z_3 z_4 = 24$ rezultă că $\left(\frac{5}{2} - 3r\right) \cdot \left(\frac{5}{2} - r\right) \cdot \left(\frac{5}{2} + r\right) \cdot \left(\frac{5}{2} + 3r\right) = 24$ și cu notația $r^2 = t$ se obține ecuația $\left(\frac{25}{4} - 9t\right)\left(\frac{25}{4} - t\right) = 24$. Rezultă $m = 35$ și $x \in \{1, 2, 3, 4\}$. • **A4. a)** Avem $x_1 x_3 = x_2^2$ și $x_1 x_2 x_3 = -27$. Se obține $x_2 = -3$, apoi $m = 4$ și soluțiile $-3, \frac{7 \pm \sqrt{13}}{2}$. **b)** Fie $a,\ aq,\ aq^2,\ aq^3$ soluțiile ecuației. Din relațiile lui Viète se obține că $a^4 q^6 = \frac{1}{4}$ și $a^2\left(q + q^2 + 2q^3 + + q^4 + q^5\right) = \frac{35}{8}$ sau $a^2 q^3 = \pm\frac{1}{2}$ și $\left(1 + q + 2q^2 + q^3 + q^4\right) = \pm\frac{35}{4}q^2$. Rezultă că $\left(1 + q + q^2\right)\left(1 + q^2\right) = \pm\frac{35}{4}q^2$ sau $\left(\frac{1}{q} + 1 + q\right)\left(\frac{1}{q} + q\right) = \pm\frac{35}{4}$. Cu notația $q + \frac{1}{q} = t$ obținem $t(t+1) = \frac{35}{4}$ cu soluțiile $t \in \left\{-\frac{7}{2}, \frac{5}{2}\right\}$, respectiv $t(t+1) = -\frac{35}{4}$ cu soluțiile $t \in \left\{\frac{-1 \pm i\sqrt{34}}{2}\right\}$ etc. • **A8. a)** Considerăm $x, y, z \in \mathbb{R}$ soluții ale ecuației de gradul 3 în t: $t^3 - 2t^2 + mt + 2 = 0$. Din relația $x^2 + y^2 + z^2 = 6$ se obține că $(x + y + z)^2 - 2(xy + yz + xz) = 6$ și $xy + yz + zx = 1$. Așadar x, y, z verifică ecuația $t^3 - 2t^2 - t + 2 = 0$ sau $(t-2)\left(t^2 - 1\right) = 0$. Se obține $x = 2,\ y = 1,\ z = -1$ sau permutări ale acestora.

**7. Rezolvarea ecuațiilor algebrice cu coeficienți în $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ (pag. 160)**

• **E4. a)** Ecuația are și soluția $x_2 = 1+\sqrt{3}$. Rezultă că polinomul $f = X^4 - 4X^3 - 4X^2 + 16X + 12$ se divide cu $g = \left(X - 1 + \sqrt{3}\right)\left(X - 1 - \sqrt{3}\right) = X^2 - 2X - 2$. Se obține câtul $g = X^2 - 2X - 6$. **b)** $f = \left(X^2 - 2X - 1\right)\left(X^2 + 1\right)$. **d)** $x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{5}$, $x_3 = 1$, $x_4 = 3$.

• **A1.** Soluțiile întregi pot fi $-1, 1, 2, -2$. Se obține că $a \in \{6, -2, 4, -3\}$.

• **A2.** Dacă cele două soluții sunt simple ele pot fi doi dintre divizorii lui 2, și anume: $\{x_1, x_2\} \in \{(-1, 1), (-1, 2), (-1, -2), (1, -2), (1, 2)\}$. De asemenea putem avea: $x_1 = x_2 \in \{-1, 1, -2, 2\}$. • **A3. c)** Soluțiile raționale aparțin mulțimii $\left\{-1, 1, -2, 2, -3, 3, -6, 6, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right\}$. Rezultă că $a \in \{-4, 0, -3, -13, -12, -49, -95\}$.

• **A6.** $a = 14$, $b = 3$ sau $a = \frac{238}{27}$, $b = -\frac{1}{3}$. • **A8.** Se analizează cazurile $x_1 = x_2 = 1$ și $x_1 = x_2 = -1$. Se obține $a = b = -1$ sau $a = b = 3$. Cazul $a = b = 3$ nu convine deoarece se obține soluția triplă $x = -1$. • **A10. a)** Polinomul atașat ecuației se divide cu $g = X^4 - 10X^3 + 21X^2 + 14X + 2$. Se găsește $a = -10$, $b = 22$, $c = 14$, $d = 2$. • **A11.** Ecuația admite și soluțiile $x_2 = \sqrt{2} - \sqrt{5}$, $x_3 = -\sqrt{2} + \sqrt{5}$, $x_4 = -\sqrt{2} - \sqrt{5}$ și se scrie $(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) = 0$. Altfel, fie $x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$. Atunci $x^2 = 5 + 2\sqrt{6}$ sau $\left(x^2 - 5\right)^2 = \left(2\sqrt{6}\right)^2$, de unde $x^4 - 10x^2 + 1 = 0$.

**8. Rezolvarea unor ecuații algebrice de grad superior cu coeficienți în $\mathbb{C}$ (pag. 167)**

• **A3.** Condiția $ab + a - b - 1 = 0$ conduce la $(a-1)(b+1) = 0$. Pentru $b = -1 \Rightarrow a = 8$, iar pentru $a = 1 \Rightarrow b^2 = 22$. • **A5.** $a \in \{3, -1\}$. • **A11.** Se împarte cu $x^2$ și se fac notațiile: **a)** $y = x + \frac{2}{x}$; **b)** $y = x - \frac{6}{x}$; **c)** $y = x + \frac{a}{x}$. • **A12. c)** Se notează $y = x + \frac{a+b}{2}$ și se obține ecuația $(y+\alpha)^4 + (y-\alpha)^4 = c$, unde $\alpha = \frac{a-b}{2}$. **e)** După efectuarea produsului se împarte cu $x^2$ și se notează $y = x + \frac{a^2}{x}$. • **A13.** Se notează $\log_6 x = y$ și se obține ecuația reciprocă.

# – ANALIZĂ MATEMATICĂ –

## CAPITOLUL I. Primitive

### 3. Proprietăți ale integralei nedefinite (pag. 180)

• **E1.** Se folosește că $F'(x)=f(x),\ x\in D$. • **E2.** Se verifică faptul că F este derivabilă pe $\mathbb{R}$ și $F'(x)=f(x),\ x\in\mathbb{R}$. • **E3.** $F_2$ este primitivă a funcției f.

• **E4.** Funcțiile sunt continue. • **E5.** $\int(3x^2+2x)dx=x^3+x^2+\mathscr{C}$. Dacă $F(x)=$ $=x^3+x^2+c,\ x\in\mathbb{R}$ este o primitivă, din condiția $F(-1)=2$, rezultă $c=2$ și $F(x)=x^3+x^2+2$.

• **A2.** $F_1$ și $F_3$. • **A3.** Funcțiile sunt continue. **e)** $f(x)=\begin{cases}\cos x,\ x\le 0\\ |x-1|,\ x>0\end{cases}$. • **A4.** f este continuă. $F(x)=\begin{cases}e^{x+1}+c_1,\ x\le -1\\ 2x+\dfrac{x^2}{2}+c_2,\ x>-1\end{cases}$. Din condiția că F este continuă în $x=-1$, rezultă că $c_1=-\dfrac{5}{2}+c_2$ și din $F(2)=\dfrac{3}{2}$ rezultă $c_2=-\dfrac{9}{2},\ c_1=-7$.

• **A6.** $a=\dfrac{2}{e},\ b=-1$. • **A7.** Din continuitatea în $x=1$ rezultă $3a-b=-9$ și din derivabilitatea în $x=1$ se obține $9a+2b=-15$. Rezultă $a=-\dfrac{11}{5},\ b=\dfrac{12}{5}$.

• **A8.** $a=\dfrac{2}{3},\ b=-2$. • **A9.** $a=1,\ b\in\mathbb{R},\ c=0$. • **A10.** $a=b=1$. • **A11.** $a=-3,\ b=4$.

• **A12.** Funcțiile de la a), b), c) nu au proprietatea lui Darboux deoarece: **a)** $f(\mathbb{R})=$ $=\mathbb{Z}\ne$ interval. **b)** $f\left(\left[\dfrac{9}{10},1\right]\right)=\left(-2,-\dfrac{9}{5}\right]\cup\{-1\}$; **c)** $f(\mathbb{R})=\{-1,0,1\}$; **d)** f are discontinuități de prima speță; **e)** $f([2,3])$ nu este interval.

• **D3.** Presupunem prin absurd că g admite primitive. Rezultă că funcția $h=g-f$ admite primitive pe I. Dar, $h(I)=\{0,\ b-f(a)\}\ne$ interval, contradicție cu h admite primitive.

### 4. Primitive uzuale (pag. 190)

• **E3. c)** Avem $2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}=\sin x$ și integrala este $\int\sin x\,dx=-\cos x+\mathscr{C}$.

**d), e)** Se folosește că $2\cos^2\dfrac{x}{2}=1+\cos x$, respectiv $2\sin^2\dfrac{x}{2}=1-\cos x$.

• **A2. a)** Avem $\dfrac{1}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}=\dfrac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}=\dfrac{1}{\cos^2 x}+\dfrac{1}{\sin^2 x}$ etc. **b)** Se folo-

sește formula $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$. **d)** $\int \frac{\sin^3 x-8}{1-\cos^2 x}dx=\int \frac{\sin^3 x-8}{\sin^2 x}dx=$

$=\int\left(\sin x-\frac{8}{\sin^2 x}\right)dx=-\cos x+8\operatorname{ctg} x+\mathscr{C}$. **f)** $\int\left(1+\operatorname{tg}^2 x\right)dx=\int(\operatorname{tg} x)'dx=\operatorname{tg} x+\mathscr{C}$.

• **A3. a)** $\frac{x^4+x^2+1}{x^2-x+1}=\frac{\left(x^2-x+1\right)\left(x^2+x+1\right)}{x^2-x+1}=x^2+x+1$ etc. **b)** Se folosește $x^3-1=(x-1)\left(x^2+x+1\right)$. • **A4. a)** $\int 6x\left(3x^2+1\right)^7dx=\int\left(3x^2+1\right)'\left(3x^2+1\right)^7dx=$

$=\int u'(x)\cdot u^7(x)dx=\frac{u^8(x)}{8}+\mathscr{C}=\frac{\left(3x^2+1\right)^8}{8}+\mathscr{C}$. **c)** $\int x^4\sqrt[3]{x^5+1}\,dx=\frac{1}{5}\int 5x^4\sqrt[3]{x^5+1}\,dx=$

$=\frac{1}{5}\int\left(x^5+1\right)'\sqrt[3]{\left(x^5+1\right)}\,dx=\frac{1}{5}\int u'(x)\cdot(u(x))^{\frac{1}{3}}dx=\frac{1}{5}\cdot\frac{(u(x))^{1+\frac{1}{3}}}{1+\frac{1}{3}}+\mathscr{C}$ etc. **d)** $\int\frac{3x^2}{\sqrt{x^3+1}}dx=$

$=\int\frac{\left(x^3+1\right)'}{\sqrt{x^3+1}}dx=\int\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}dx=2\int\left(\sqrt{u(x)}\right)'dx=2\sqrt{u(x)}+\mathscr{C}=2\sqrt{x^3+1}+\mathscr{C}$.

**e)** $\int\frac{1}{x}\ln^4 x\,dx=\int(\ln x)'\cdot\ln^4 x\,dx=\int u'(x)\cdot u^4(x)dx=\frac{u^5(x)}{5}+\mathscr{C}=\frac{\ln^5 x}{5}+\mathscr{C}$.

**g)** $\int\frac{x-1}{3x^2-6x+11}dx=\frac{1}{6}\int\frac{6x-6}{3x^2-6x+11}dx=\frac{1}{6}\int\frac{u'(x)}{u(x)}dx=\frac{1}{6}\ln|u(x)|+\mathscr{C}=$

$=\frac{1}{6}\ln\left(3x^2-6x+11\right)+\mathscr{C}$. **h)** $\int\frac{2x}{x^4-1}dx=\int\frac{\left(x^2\right)'}{\left(x^2\right)^2-1}dx=\int\frac{u'(x)}{u^2(x)-1}dx=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{u(x)-1}{u(x)+1}\right|+$

$+\mathscr{C}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}\right|+\mathscr{C}$. **k)** $\int\frac{x}{x^4+1}dx=\frac{1}{2}\int\frac{\left(x^2\right)'}{\left(x^2\right)^2+1}dx=\frac{1}{2}\int\frac{u'(x)}{u^2(x)+1}dx=\frac{1}{2}\cdot\operatorname{arctg} u(x)+$

$+\mathscr{C}=\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x^2+\mathscr{C}$. **l)** $\int\frac{x^2}{\sqrt{x^6-25}}dx=\frac{1}{3}\int\frac{\left(x^3\right)'}{\sqrt{\left(x^3\right)^2-25}}dx=\frac{1}{3}\int\frac{u'(x)}{\sqrt{u^2(x)-25}}dx=$

$=\frac{1}{3}\cdot\ln\left|u(x)+\sqrt{u^2(x)-25}\right|+\mathscr{C}$ etc. **n)** $\int\frac{x+x^3}{1+x^4}dx=\int\frac{x}{1+x^4}dx+\int\frac{x^3}{1+x^4}dx=$

$=\frac{1}{2}\int\frac{2x}{1+\left(x^2\right)^2}dx+\frac{1}{4}\int\frac{4x^3}{1+x^4}dx=\frac{1}{2}\int\frac{\left(x^2\right)'}{1+\left(x^2\right)^2}dx+\frac{1}{4}\int\frac{\left(1+x^4\right)'}{1+x^4}dx=\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x^2+$

$+\frac{1}{4}\ln\left(1+x^4\right)+\mathscr{C}$. • **A5. a)** $\frac{\operatorname{arctg}^7 x}{7}+\mathscr{C}$; **b)** $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sin x-2}{\sin x+2}\right|+\mathscr{C}$; **c)** $\frac{1}{6}\ln\left|\frac{\cos x-3}{\cos x+3}\right|+\mathscr{C}$;

**d)** $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sin x}{2}\right)+\mathscr{C}$; **e)** $\frac{1}{2}\sin^2\left(x^2+1\right)+\mathscr{C}$; **f)** $-\cos 2\left(x^2+1\right)+\mathscr{C}$; **g)** $\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x+\mathscr{C}$;

**h)** $\arcsin\left(\frac{\sin x}{x}\right)+\mathscr{C}$; **j)** $-\frac{\cos^3 x}{3}+\frac{\cos^5 x}{5}+\mathscr{C}$. • **A6. a)** $\int x^2 \ln x\,dx=\int\left(\frac{x^3}{3}\right)'\ln x\,dx=$

$=\frac{x^3}{3}\cdot\ln x-\int\frac{x^3}{3}\cdot(\ln x)'\,dx=\frac{x^3}{3}\cdot\ln x-\frac{1}{3}\int x^2 dx=\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{1}{9}x^3+\mathscr{C}$; **b)** $\int xe^{-x}dx=$

$=\int x\cdot\left(-e^{-x}\right)'dx=-xe^{-x}+\int e^{-x}dx=-xe^{-x}-e^{-x}+\mathscr{C}$. **c)** $\int\sin^2 x\,dx=\int\sin x\cdot(-\cos x)'\,dx=$

$=-\sin x\cdot\cos x+\int\cos^2 x\,dx=-\sin x\cdot\cos x+\int\left(1-\sin^2 x\right)dx=-\sin x\cdot\cos x+x-\int\sin^2 x\,dx.$

Rezultă $2\int\sin^2 x\,dx=-\sin x\cdot\cos x+x+\mathscr{C}$, etc. **e)** $\int\sqrt{x^2+25}\,dx=\int x'\sqrt{x^2+25}\,dx=$

$=x\sqrt{x^2+25}-\int x\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+25}}dx=x\sqrt{x^2+25}-\int\frac{\left(x^2+25\right)-25}{\sqrt{x^2+25}}dx=x\sqrt{x^2+25}-$

$-\int\sqrt{x^2+25}\,dx+25\ln\left(x+\sqrt{x^2+25}\right)$. Rezultă $\int\sqrt{x^2+25}\,dx=\frac{1}{2}\Big[x\sqrt{x^2+25}+25\cdot$

$\cdot\ln\left(x+\sqrt{x^2+25}\right)\Big]+\mathscr{C}$. **h)** $\frac{x^2+1}{2}\operatorname{arctg} x-\frac{x}{2}+\mathscr{C}$.

## CAPITOLUL II. Integrala definită

### 3. Integrabilitatea unei funcții pe un interval $[a, b]$ (pag. 201)

• **E1. a)** $\frac{17}{8}$; **b)** $\frac{56}{9}$; **c)** $\frac{201}{32}$; **d)** 12. • **E2. a)** $S_n=\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{k-1}{n}=\frac{n(n-1)}{2n^2}$, $L=\frac{1}{2}$.

**b)** $S_n=\frac{2n+1}{n}$, $L=2$; **c)** $S_n=\frac{5n^2-6n+1}{6n^2}$, $L=\frac{5}{6}$; **d)** $S_n=\frac{(n+1)^2}{4n^2}$, $L=\frac{1}{4}$.

• **E3. a)** $\operatorname{Im} f=\{2, 3\}\neq$ interval. Rezultă că f nu are proprietatea lui Darboux, deci nu are primitive pe $[0, 1]$. **b)** f diferă de funcția integrabilă $g:[0, 1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=3$, în punctul $x_0=1$. Atunci f este integrabilă pe $[0, 1]$ și $\int_0^1 f(x)dx=$ $=\int_0^1 g(x)dx=3$. • **E4. a)** $\operatorname{Im} f=\{-1, 1\}\neq$ interval; **b)** există două șiruri de sume Riemann cu limite distincte.

• **A1. a)** $\frac{\pi}{4}\cdot\left(1+\sqrt{3}\right)$; **b)** $-\frac{21}{20}$. • **A2.** $\alpha=\frac{1}{3}$. • **A3.** Se arată că funcțiile nu sunt mărginite pe domeniul de definiție, deci nu sunt integrabile. • **A4. a)** Se ia șirul

$x_n=\left(\sqrt{2n\pi+\frac{\pi}{2}}\right)^{-1}\underset{n\to\infty}{\to}0$, iar $f(x_n)=2\sqrt{2n\pi+\frac{\pi}{2}}\cdot\sin\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)=2\sqrt{2n\pi+\frac{\pi}{2}}\underset{n\to\infty}{\to}\infty$.

Rezultă că f nu este mărginită, deci nu este integrabilă pe $[-1, 1]$. **b)** F este derivabilă pe $[-1, 1]$ și $F'(x)=f(x)$. • **A5.** $a^4+8=10a^2-1\Rightarrow a\in\{\pm1, \pm3\}$.

• **A6.** Din condiția că f este integrabilă pe $[a, b]$ rezultă că pentru orice șir de diviziuni $(\Delta_n)$, $\|\Delta_n\| \to 0$ ale intervalului $[a, b]$ și pentru orice șir de puncte intermediare $\left(\xi_i^{(n)}\right)$ corespunzător, șirul sumelor Riemann este convergent. Alegând $\xi_i^{(n)}$ astfel încât $f\left(\xi_i^{(n)}\right) = c$, atunci $\sigma_{\Delta_n}\left(f, \xi_i^{(n)}\right) = c(b-a)$. Rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_{\Delta_n}\left(f, \xi_i^{(n)}\right) = c(b-a) = \int_a^b f(x)dx$. • **A7.** Se construiesc două șiruri de sume Riemann cu limite distincte.

**4. Integrabilitatea funcțiilor continue (pag. 204)**

• **E1.** Funcțiile sunt mărginite și au un număr finit de puncte de discontinuitate. • **E2. a), b), c), e)** – funcțiile sunt continue, deci integrabile pe D. **d)** f este mărginită și are un punct de discontinuitate, deci este integrabilă pe $[-1, 1]$.

• **A1. a), b), c)** funcțiile sunt continue. • **A2. a), b)** funcțiile sunt mărginite, cu un număr finit de puncte de discontinuitate. • **A3. a)** f este continuă; **b)** g este mărginită, cu două puncte de discontinuitate; **c)** h este nemărginită, deci nu este integrabilă; **d)** j este continuă. • **A4. a)** f nu este integrabilă pe $[-1, 1]$ deoarece există șiruri de sume Riemann cu limite diferite; $(f \circ f)(x) = 1,\ \forall\ x \in [-1, 1]$, deci este integrabilă pe $[-1, 1]$. **b)** $(f \circ f)(x) = \sqrt{3},\ \forall\ x \in [0, 2]$, deci este integrabilă pe $[0, 2]$. • **A5.** f este integrabilă pe $[-1, 1]$ conform teoremei lui Lebesque și este neintegrabilă pe $[2, 3]$ deoarece se găsesc șiruri de sume Riemann cu limite distincte.

**5. Formula lui Leibniz-Newton (pag. 208)**

• **E1. a)** 5; **b)** $\frac{17}{2}$; **c)** $\frac{1}{12}$; **d)** $-1$; **e)** 23; **f)** $\frac{\pi}{18}$; **g)** $\frac{\pi}{36}$; **h)** $\frac{1}{8}\ln\frac{5}{21}$. • **E2. a)** $\frac{1}{2}$; **b)** $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$; **c)** 1; **d)** $4\left(\sqrt{3}-1\right)$; **e)** $\pi$; **f)** 0; **g)** 1; **h)** $\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$. • **E3. a)** $\arcsin\frac{x}{\sqrt{3}}\Big|_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3}$; **b)** $\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|\Big|_2^3$; **c)** $\ln\left(x+\sqrt{x^2+9}\right)\Big|_0^4 = \ln 3$; **d)** $\ln 2$.

• **A1. a)** $\frac{1}{2}\operatorname{arctg} 2x\Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{8}$; **b)** $\frac{1}{12}\ln\left|\frac{x-\frac{3}{2}}{x+\frac{3}{2}}\right|\Bigg|_0^1 = -\frac{1}{12}\ln 5$; **c)** $\frac{1}{3}\arcsin 3x\Big|_0^{\frac{\sqrt{3}}{6}} = \frac{\pi}{9}$; **d)** $\frac{1}{2}\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$. • **A2. a)** $\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)\Big|_0^1$; **b)** $\frac{1}{4}\ln\left(x^4+1\right)\Big|_0^{\sqrt[4]{e^2-1}}$; **c)** $\sqrt{x^2+2}\,\Big|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{7}}$;

**d)** $-\sqrt{9-x^2}\Big|_0^{\sqrt{5}}$; **e)** $\frac{1}{2}\arcsin\frac{x^2}{4}\Big|_0^{\sqrt{2}}$; **f)** $\arcsin e^x\Big|_{-\ln 2}^{-\ln\sqrt{2}}$. • **A3. a)** $\frac{2}{3}\cdot\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\sqrt{3}}$;

**b)** $-\frac{1}{3}\cdot\left(9-x^2\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^3$; **c)** $\frac{2}{3}\cdot(\sin x)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$; **d)** $\arcsin\left(\frac{\ln x}{2}\right)\Big|_1^e$; **e)** $\frac{3}{4}\cdot(\ln x)^{\frac{4}{3}}\Big|_1^e$.

**6. Proprietăți ale integralei definite (pag. 216)**

• **E1. a), b)** Funcțiile f sunt mărginite și au un număr finit de puncte de discontinuitate. Rezultă că sunt integrabile pe $[-1, 2]$, respectiv $[0, 3]$ și $\int_{-1}^{2} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1}(2x+3)\,dx + \int_{1}^{2}\left(-3x^2+1\right)dx = 0$, respectiv $\int_0^3 f(x)\,dx = \int_0^2 f(x)\,dx + \int_2^3 f(x)\,dx = \frac{1}{8}\left(\pi + \ln\frac{3}{7}\right)$. **c)** f este continuă pe $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ și $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}(-\sin x)\,dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx = 2$. **d)** f este continuă pe $[-2, 2]$ și $I = \int_{-2}^{-1}\left(x^2-1\right)dx + \int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)dx + \int_1^2\left(x^2-1\right)dx = 4$. • **E2.** Se aplică proprietatea de pozitivitate a integralei.

• **E4.** Se folosește proprietatea de medie a integralei. **a)** $m=-3$, $M=7$; **b)** $m=0$, $M=\frac{4}{3}$; **c)** $m=-2$, $M=-\frac{1}{2}$; **d)** $m=\frac{4}{3}$, $M=2$; **e)** $m=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $M=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

• **A1. a)** f este continuă și $\int_{-1}^{3} f(x)\,dx = \int_{-1}^{2}(x+2)\,dx + \int_2^3 x^2dx = \frac{83}{6}$. **b)** Se aplică teorema lui Lebesque și $I = \int_0^e (x-e)\,dx + \int_e^{e^2}\ln\frac{e}{x}\,dx = \frac{-e^2-2e}{2}$. **c)** f este continuă, $I = \int_0^1(-3x+5)\,dx + \int_1^2(-x+3)\,dx + \int_2^3(3x-5)\,dx = \frac{15}{2}$. **d)** f este continuă și $I = \int_{-3}^{-2}\left(x^2+2x\right)dx + \int_{-2}^{0}\left(-x^2-2x\right)dx + \int_0^1\left(x^2+2x\right)dx = 4$.

• **A2. a)** f este mărginită și are un număr finit de puncte de discontinuitate. $\int_{-1}^{2} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} 1\,dx + \int_0^1 2\,dx + \int_1^2 3\,dx = 6$. **e)** f este integrabilă pe $[0, 3]$ (teorema lui Lebesque) și $\int_0^3 f(x)\,dx = \int_0^1 (x-2)\,dx + \int_1^2(2x-2)\,dx + \int_2^3(x+2)\,dx = 4$.

• **A5.** Se folosește inegalitatea $0 \le \frac{x^{2n}}{x+1} \le x^{2n}$, $\forall\, x\in[0, 1]$, se integrează pe $[0, 1]$ și apoi se trece la limită, după $n\to\infty$. Se obține limita zero. • **A6. a)** Se arată că $\frac{x^n}{4+x^2} \ge \frac{x^n}{9-x^2}$, $\forall\, x\in[0, 1]$, $n\in\mathbb{N}$. **b)** $0 \le \int_0^1 \frac{x^n}{x^2+4}\,dx \le \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$.

**c)** Avem $0 \le J_n \le I_n \le \frac{1}{n+1}$ și se aplică teorema cleștelui. • **A7. a)** $\ln x \ge \frac{x-1}{x}$,

$\forall\ x \in [1, 4]$. Rezultă că $\int_1^4 \ln x\, dx \ge \int_1^4 \frac{x-1}{x} dx$. **b)** Se arată că are loc relația: $\cos x \ge 1 - \frac{x^2}{2}$, $\forall\ x \in [0, 1]$. • **A8. a)** $x^n \ge x^{n+1}$, $\forall\ x \in [0, 1]$, $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \ln(1 + x^n) \ge$ $\ge \ln(1 + x^{n+1})$, $\forall\ x \in [0, 1]$, $n \in \mathbb{N} \Rightarrow I_n \ge I_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, deci $(I_n)$ este monoton. Avem $0 \le I_n \le I_1$, $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, deci $(I_n)$ este mărginit. **b)** Se arată că $\ln(1 + x^n) \le x^n$, $\forall\ x \in$ $\in [0, 1]$, $n \in \mathbb{N}$. Rezultă că $I_n \le \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$ și $\lim_{x\to\infty} I_n = 0$. • **A9. b)** $\sin^n x \ge$ $\ge \sin^{n+1} x$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $n \in \mathbb{N} \Rightarrow I_n \ge I_{n+1}$. Din $0 \le \sin x \le 1$, $\forall\ x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, se obține că șirul $(I_n)$ este mărginit. • **A10.** Din $\left[f(x)\cdot t - g(x)\right]^2 \ge 0$, $t \in \mathbb{R}$, $x \in [a, b]$, prin integrare se obține: $\int_a^b f^2(x)dx \cdot t^2 - 2\int_a^b f(x)g(x)dx \cdot t + \int_a^b g^2(x)dx \ge 0$, $\forall\ t \in \mathbb{R}$. Punând condiția $\Delta \le 0$ se obține concluzia. • **A11.** $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$. Din condiția că f este integrabilă pe $[0, 1]$ rezultă că f este mărginită, adică $\exists\ M > 0$, astfel încât $|f(x)| \le M$, $\forall\ x \in [0, 1] \Rightarrow \left|\int_0^1 x^n f(x)dx\right| \le \int_0^1 x^n |f(x)| dx \le$ $\le \int_0^1 x^n \cdot M\, dx = \left.\frac{Mx^{n+1}}{n+1}\right|_0^1 = \frac{M}{n+1} \underset{n\to\infty}{\to} 0$. Rezultă că $\lim_{n\to\infty} a_n I_n = 0$.

**7. Integrarea funcțiilor continue (pag. 223)**

• **E1. a)** $f(\xi) = \frac{1}{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}} \cdot \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$; **b)** $\frac{8}{\pi}$; **c)** $\frac{1}{4}\ln\frac{5}{3}$; **d)** $\frac{\pi}{12}$.

• **E2. a)** $\xi = \frac{196}{81}$; **b)** $\xi = \frac{1}{\sqrt{3}}$. • **E3. a)** $F'(x) = e^{x^2}(x^2 - 4)$; $F'(-2) = F'(2) = 0$. **b)** Se folosește semnul funcției $F'$.

• **A1.** Din teorema de medie, există $\xi \in [a, b]$ astfel încât $\int_a^b f(x)dx = (b - a)f(\xi)$. Presupunem că există $\xi_1$, $\xi_1 \ne \xi$, astfel încât $\int_a^b f(x)dx = (b - a)f(\xi_1)$. Atunci $f(\xi) = f(\xi_1)$, relație care contrazice strict monotonia. Rezultă că $\xi$ este unic.

• **A2.** Din teorema de medie, $\exists\ \xi_n \in (n, n+1)$ astfel încât $I_n = f(\xi_n)$. Deoarece $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\xi_n} = 1$, se obține $\lim_{n\to\infty} n^2 I_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{\xi_n^2} \cdot \xi_n^2 \cdot f(\xi_n) = 1$. • **A3.** Din teorema de medie, rezultă că $\exists\ c_n \in \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$, astfel încât $I_n = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)f(c_n) = \frac{1}{n^2 + n}\cdot$

$\cdot \text{arctg}(nc_n)$. Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} nc_n = 1$, se obține $L = \lim\limits_{n\to\infty} \text{arctg}(nc_n) = \frac{\pi}{4}$. • **A4.** Se aplică regula lui l'Hospital. **a), b)** 0; **c)** 2. • **A5. a)** f este continuă pe $\mathbb{R}$, deci admite primitive pe $\mathbb{R}$. Pentru o primitivă F avem: $\int_0^x f(t)dt = F(x) - F(0) = x^2,\ x \in \mathbb{R}$. Derivând ultima egalitate se obține $f(x) = 2x,\ x \in \mathbb{R}$. **b)** Dacă F este o primitivă a funcției f, atunci $F(x) - F(0) = F(2x) - F(x),\ x \in \mathbb{R}$. Derivând această egalitate se obține în final că f este funcție constantă. **c)** $f(x) = c \cdot e^x,\ c \in \mathbb{R}$.

• **A6.** $g(x) = \begin{cases} -2, & x \in (-\infty, -1] \\ 2x, & x \in (-1, 1) \\ 2, & x \in [1, +\infty) \end{cases}$ și se studiază derivabilitatea.

• **A7.** Dacă $a = 0$ și $b = x \in \mathbb{R}$, atunci $\int_0^x f(t)dt = g(x) - g(0)$ și $\int_0^x tf(t)dt = = xg(x)$. Rezultă că g este funcție derivabilă pe $\mathbb{R}$. Se deduce $f(x) = g'(x)$ și $xf(x) = g(x) + xg'(x),\ x \in \mathbb{R}$. Substituind $g'$ se obține $xf(x) = g(x) + xf(x)$, de unde $g(x) = 0,\ x \in \mathbb{R}$ și $f(x) = 0,\ x \in \mathbb{R}$.

## 8. Metode de calcul pentru integrale definite
### 8.1. Metoda integrării prin părți (pag. 229)

• **E1. a)** Avem: $\int_0^1 xe^{2x}dx = \int_0^1 x \cdot \left(\frac{e^{2x}}{2}\right)' dx = x \cdot \frac{e^{2x}}{2}\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{e^{2x}}{2}dx = \frac{e^2}{2} - \frac{e^{2x}}{4}\Big|_0^1 = = \frac{e^2+1}{4}$. **b)** $\int_0^1 (2x-1)e^x dx = \int_0^1 (2x-1)(e^x)' dx = (2x-1)e^x\Big|_0^1 - \int_0^1 2e^x dx = e + 1 - -2e^x\Big|_0^1 = 3 - e$. **c)** $\int_1^e x\ln x\,dx = \int_1^e \left(\frac{x^2}{2}\right)' \ln x\,dx = \frac{x^2}{2} \cdot \ln x\Big|_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x}dx = \frac{e^2}{2} - -\frac{x^2}{4}\Big|_1^e = \frac{e^2+1}{4}$. **d)** $\int_1^e x^2 \ln x\,dx = \int_1^e \left(\frac{x^3}{3}\right)' \ln x\,dx = \frac{x^3}{3}\ln x\Big|_1^e - \int_1^e \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{3}dx = \frac{e^3}{3} - -\frac{x^3}{9}\Big|_1^e = \frac{2e^3+1}{9}$. **e)** $\int_1^{e^2} \ln^2 x\,dx = \int_1^{e^2} x' \ln^2 x\,dx = x\ln^2 x\Big|_1^{e^2} - \int_1^{e^2} x \cdot 2\ln x \cdot \frac{1}{x}dx = = 4e^2 - 2\int_1^{e^2} \ln x\,dx = 4e^2 - 2\int_1^{e^2} x' \ln x\,dx = 4e^2 - 2\left(x\ln x\Big|_1^{e^2} - \int_1^{e^2} 1\,dx\right) = 2(e^2-1)$.

**f)** $\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx = \int_1^e (\ln x)' \ln x\,dx = \ln^2 x\Big|_1^e - \int_1^e \frac{\ln x}{x}dx$. Rezultă că $2\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx = = \ln^2 x\Big|_1^e = 1$ și $\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx = \frac{1}{2}$. • **E2. a)** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+1)\sin x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+1)(-\cos x)' dx =$

$= -(x+1)\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = 2.$ **b)** $-\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}.$ **c)** $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin x(-\cos x)'\,dx =$

$= -\sin x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} + \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 x\,dx = -\frac{\sqrt{3}}{4} + \int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(1-\sin^2 x\right)dx = -\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\pi}{6}-\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 x\,dx.$

Rezultă că $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\pi}{6}\right).$ **d)** $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\sin^2 x}dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} x\cdot(-\operatorname{ctg} x)'\,dx =$

$= -x\operatorname{ctg} x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{ctg} x\,dx = \frac{\pi}{4} + \ln(\sin x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}+\ln\sqrt{2}.$ • **E3. a)** $I = \int_1^{\sqrt{5}} \sqrt{x^2+4}\,dx =$

$= \int_1^{\sqrt{5}} x'\cdot\sqrt{x^2+4}\,dx = x\sqrt{x^2+4}\,\Big|_1^{\sqrt{5}} - \int_1^{\sqrt{5}} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+4}}dx = 2\sqrt{5} - \int_1^{\sqrt{5}} \frac{\left(x^2+4\right)-4}{\sqrt{x^2+4}}dx =$

$= 2\sqrt{5} - I + 4\int_1^{\sqrt{5}} \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}dx = 2\sqrt{5} - I + 4\ln\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)\Big|_1^{\sqrt{5}}.$ Se obține $I = \sqrt{5}+2\ln\frac{3+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}.$

**d)** $I = \int_0^1 x\sqrt{x^2+1}\,dx = \int_0^1 \frac{x\left(x^2+1\right)}{\sqrt{x^2+1}}dx = \int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}dx + \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx = I_1 + \sqrt{x^2+1}\,\Big|_0^1 =$

$= I_1 + \sqrt{2}-1;\ I_1 = \int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}dx = \int_0^1 x^2\left(\sqrt{x^2+1}\right)'dx = x^2\sqrt{x^2+1}\,\Big|_0^1 - 2\int_0^1 x\sqrt{x^2+1}\,dx =$

$= \sqrt{2}-2I.$ Rezultă că $I = \sqrt{2}-2I+\sqrt{2}-1,$ deci $I = \frac{2\sqrt{2}-1}{3}.$

• **A1. a)** $16-2e^2$; **b)** $\frac{5e^4-1}{4}$; **c)** $\frac{e^{\pi}+1}{2}$; **d)** $\ln\left(1+\sqrt{2}\right)+1-\sqrt{2}$; **e)** $e(\sin 1-\cos 1)$;

**f)** $\frac{1}{4\ln 3}$; **g)** Integrala se scrie $\frac{1}{2}\int 2xe^{x^2}\left(1+x^2\right)dx = \frac{1}{2}\int\left(e^{x^2}\right)'\left(1+x^2\right)dx = \ldots = \frac{e}{2}.$

**h)** $\frac{ne^{n+1}+1}{(n+1)^2}.$ **i)** $2\ln\left(\sqrt{3}+2\right)-\sqrt{3}.$ • **A2. a)** $\frac{2}{3}$; **b)** $\frac{\pi^2+4}{16}$; **c)** $\frac{3\sqrt{3}-\pi}{48}$; **d)** $\frac{\pi}{4}-\ln\sqrt{2}$;

**e)** $\pi$; **f)** $\frac{1}{2}\left(e^{\frac{\pi}{2}}-1\right)$; **g)** $\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}+\ln\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; **h)** $I = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} x\cdot\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)'dx = \ldots = \frac{\pi}{9}+\frac{\sqrt{3}}{3}.$

• **A3. a)** $\frac{\pi\sqrt{2}}{4}-\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$; **b)** $\frac{3\pi^2}{32}$; **c)** $\frac{5\pi}{12}-\frac{\sqrt{3}-1}{2}$; **d)** $\frac{2\pi}{3}+\ln\left(2-\sqrt{3}\right)$; **e)** $\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}-2$;

**f)** $\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)'\cdot\arccos x\,dx = \ldots.$ **g)** $\frac{\pi^2}{72}+\frac{\pi\sqrt{3}}{6}-1.$ • **A4. a)** $\int_0^{\pi} x\sin x\,dx - \int_{\pi}^{2\pi} x\cdot$

$\cdot\sin x = 4\pi.$ **b)** $I = \int_{-1}^{0}\left(x^2-x\right)e^x dx + \int_0^1\left(x-x^2\right)e^x dx + \int_1^3\left(x^2-x\right)e^x dx.$ **c)** $I =$

$= \int_{\frac{1}{e}}^{1}\left(-\ln x-\frac{1}{x}\right)dx + \int_1^e \ln x\,dx + \int_e^{e^2}\left(\ln x+\frac{1}{x}\right)dx = \frac{e^3+2e-2}{e}.$ • **A5. a)** $\frac{2}{3}$; **b)** $a\in\left\{-\frac{5}{3}, 2\right\}.$

• **A6. a)** $I=\int_0^1 \frac{x^2\left(x^2+4\right)}{\sqrt{x^2+4}}dx=\int_0^1\frac{x^4}{\sqrt{x^2+4}}dx+4\int_0^1\frac{x^2}{\sqrt{x^2+4}}dx=I_1+4I_2.$

$I_1=\int_0^1 x^3\left(\sqrt{x^2+4}\right)'dx=x^3\sqrt{x^2+4}\Big|_0^1-3I=\sqrt{5}-3I.$ $I_2=\int_0^1 x\left(\sqrt{x^2+4}\right)'dx=$

$=x\sqrt{x^2+4}\Big|_0^1-\int_0^1\sqrt{x^2+4}\,dx=\sqrt{5}-\int_0^1\frac{x^2+4}{\sqrt{x^2+4}}dx=\sqrt{5}-I_2-4\ln\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)\Big|_0^1.$

Se înlocuiește $I_1$ și $I_2$ în I. • **A7. a)** $4\ln 2-\frac{7}{4}$; **b)** $e^2+e+2e^{-1}-3$. • **A8. a)** Se integrează prin părți. **b)** $(I_n)$ este mărginit, monoton și $\frac{I_n}{n}+I_{n-1}=\frac{e}{n}$. Se trece la limită în această egalitate și se obține limita zero. • **A9. a)** $I_0=\frac{\pi}{2}, I_1=1, I_2=\frac{\pi}{4}$.
**b)** Avem $0\le\cos x\le 1,\ \forall\ x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Rezultă inegalitatea $\cos^n x\ge\cos^{n+1}x,\ \forall\ x\in$ $\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ și deci $I_n\ge I_{n+1},\ n\in\mathbb{N}$. **c)** $I_n=\frac{n-1}{n}\cdot I_{n-2},\ n\ge 2,\ I_0=\frac{\pi}{2},\ I_1=1$.

• **A10. b)** $I_n=\frac{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot2n}{3\cdot5\cdot7\cdot\ldots\cdot(2n+1)}$. **c)** $I_n=\int_0^1\left(1-x^2\right)^n dx=\int_0^1\Big[C_n^0-C_n^1x^2+C_n^2\left(x^2\right)^2-$ $-C_n^3\left(x^2\right)^3+\ldots+(-1)^nC_n^n\left(x^2\right)^n\Big]dx=C_n^0-\frac{1}{3}C_n^1+\frac{1}{5}C_n^2-\ldots+\frac{(-1)^n}{2n+1}C_n^n.$

• **A11. a)** $I_0=1-\frac{1}{e},\ I_1=1-\frac{2}{e},\ I_2=2-\frac{5}{e}$. **b)** $I_n=\int_0^1 x^n\cdot\left(-e^{-x}\right)'dx=-e^{-x}\cdot x^n\Big|_0^1+$ $+\int_0^1 nx^{n-1}e^{-x}dx=-\frac{1}{e}+nI_{n-1}$. **c)** Se demonstrează prin inducție. Pentru $n=1$, rezultă $I_1=1-\frac{1}{e}$, egalitate adevărată din a). Dacă $I_{n-1}=\frac{(n-1)!}{e}\left[e-\left(1+\frac{1}{1!}+\ldots\frac{1}{(n-1)!}\right)\right]$, din b) rezultă $I_n=-\frac{1}{e}+nI_{n-1}=-\frac{1}{e}+\frac{n!}{e}\left[e-\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{(n-1)!}\right)\right]=\frac{n!}{e}\cdot$ $\cdot\left[e-\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{(n-1)!}+\frac{1}{n!}\right)\right].$

### 8.2.1. Prima metodă de schimbare de variabilă (pag. 236)

• **E1. b)** $\int_{-1}^1 6x^2\cdot\left(2x^3+1\right)^4dx=\int_{-1}^1\left(2x^3+1\right)'\left(2x^3+1\right)^4dx=\int_{-1}^1 u'(x)\cdot u^4(x)dx=$ $=\int_{u(-1)}^{u(1)}t^4dt=\frac{t^5}{5}\Big|_{-1}^3=\frac{244}{5}$. **c)** $I=\frac{1}{2}\int_1^2 u'(x)\cdot u^{-3}(x)dx=\frac{1}{2}\int_3^5 t^{-3}dt$, etc. **d)** $I=$ $=\int_{-1}^0 u'(x)\cdot u^{\frac{1}{3}}(x)dx=\int_{-3}^{-2}t^{\frac{1}{3}}dt$, etc. **e)** $\frac{2}{3}\left(1-2\sqrt{2}\right)$; **f)** $\frac{2}{25}$; **g)** $\frac{1}{2}$; **h)** $\ln 3$;

**i)** $\ln\sqrt{\frac{3}{2}}$. **j)** $\frac{1}{8}\ln 3$; **k)** $\frac{\pi}{12\sqrt{3}}$; **l)** $\frac{\pi}{4}$. • **E2. a)** $\frac{e-1}{2}$; **b)** $\frac{2}{9\ln 3}$; **c)** $e-\sqrt{e}$; **d)** $\frac{1}{5}$;

**e)** $\frac{3}{2}$; **f)** $-\frac{\pi}{6}$; **g)** $\frac{1}{3}\ln\frac{3+2\sqrt{2}}{2+\sqrt{3}}$; **h)** $2\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$. • **E4. a), b)** Funcția este impară.

• **A1. a)** $\frac{1}{3}\ln\frac{4}{3}$; **b)** $\frac{1}{3}$; **c)** $\frac{12}{\ln 3}$; **e)** $\frac{\pi+\ln 4}{8}$; **f)** $\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{5}+3}{2}$; **g)** $\frac{33}{5}$;

**h)** $4\left(\sqrt{3}-1\right)$; **i)** $I=\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{x^2\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}dx=\int_1^{\sqrt{3}}\frac{\left(-\frac{1}{x}\right)'}{\sqrt{1+\left(-\frac{1}{x}\right)^2}}dx=\ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{3}}$;

**j)** $I=\int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{2}\left(-\frac{1}{x}\right)'\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\left(-\frac{1}{x}\right)^2}}dx=\frac{\pi}{6}$; **k)** $\frac{\pi}{24}$; **l)** $I=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{1}{x^3}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}}}dx$; se alege $u(x)=\frac{1}{x^2}$; **m)** $I=\int_{-1}^{1}\sqrt{(x+3)^2+1}\,dx$; se alege $u(x)=x+3$;

**n)** $I=\int_2^5\sqrt{\frac{25}{4}-\left(x-\frac{7}{2}\right)^2}\,dx$; se alege $u(x)=x-\frac{7}{2}$.

• **A2. a)** $1+2\ln\frac{2}{3}$; **b)** $\frac{\pi}{6}$; **c)** $I=\int_0^1\frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}dx=\int_0^1\frac{-u(x)}{u(x)}dx=\ln\frac{2e}{e+1}$; **d)** $\ln\frac{e+1}{e}$;

**f)** $I=\int_{\ln\sqrt{2}}^{\ln 2}\frac{e^x-1}{\sqrt{e^{2x}-1}}dx=\ln\left(e^x+\sqrt{e^{2x}-1}\right)\Big|_{\ln\sqrt{2}}^{\ln 2}-\int_{\ln\sqrt{2}}^{\ln 2}\frac{1}{\sqrt{e^{2x}-1}}$. Se scrie $\frac{1}{\sqrt{e^{2x}-1}}=$ $=\frac{e^{-x}}{\sqrt{1-e^{-2x}}}$ și se alege $u(x)=e^{-x}$. • **A3. a)** $-\frac{1}{4}\ln 3$; **b)** $\frac{\pi}{6\sqrt{3}}$; **c)** $\ln\sqrt{2}$; **d)** $\frac{1}{8}$;

**e)** $\frac{4}{3}$; **f)** $1-\ln\sqrt{2}$; **g)** $\frac{\pi}{6}$; **h)** $\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$; **i)** $-\frac{\pi}{6}+\ln\left(2+\sqrt{3}\right)$; **j)** $\frac{\pi}{4}$.

• **A4.** Se transformă produsul de funcții trigonometrice în sumă. **a)** $-\frac{1}{2}$; **b)** 0;

**c)** 0; **d)** $\frac{1}{8}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$. **e)** $I=\int_0^{\pi}\frac{1}{2^n}\cdot\sin 2^n x\,dx$, etc. • **A5. a)** $\ln\sqrt{3}$; **b)** $2\sqrt{3}$; **c)** $\frac{4}{3}$;

**d)** $-\frac{\pi}{4}+\frac{13}{15}$; **e)** $-\frac{\pi}{6\sqrt{2}}$. • **A6. a), b), c)** Se pot folosi formulele $\sin x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$,

$\cos x=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$. **d)** Se pot folosi formulele: $\sin x=\frac{\operatorname{tg}x}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2x}}$, $\cos x=\frac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2x}}$.

### 8.2.2. A doua metodă de schimbare de variabilă (pag. 240)

• **E1. a)** Se alege $u:\left[\frac{1}{4}, 1\right]\to\left[\frac{3}{2}, 2\right]$, $u(x)=1+\sqrt{x}$, bijectivă, derivabilă, $u^{-1}:\left[\frac{3}{2}, 2\right]\to\left[\frac{1}{4}, 1\right]$, $u^{-1}(t)=(t-1)^2$ și $\left(u^{-1}\right)'(t)=2(t-1)$; $f:\left[\frac{3}{2}, 2\right]\to\mathbb{R}$, $f(x)=$ $=x^5$. Se obține $I=\int_{\frac{3}{2}}^{2} t^5\cdot 2(t-1)\,dt=2\left(\frac{t^7}{7}-\frac{t^6}{6}\right)\Big|_{\frac{3}{2}}^{2}$, etc. **c)** $2-\pi+4\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$; **d)** $2\left(1+2\ln\frac{4}{5}\right)$. • **E2. a)** $3\left(\frac{1}{2}+\ln\frac{3}{2}\right)$; **b)** $\ln\frac{3}{2}$.

• **A1. a)** $u(x)=\sqrt[6]{x}$; **b)** $u(x)=e^x$; **c)** $u(x)=\sqrt{1+3x}$; **d)** $u(x)=\frac{1}{x^2+1}$.

• **A2. a)** $u(x)=\sqrt{e^x-1}$; **b)** $u(x)=\sqrt[6]{x}$; **c)** $u(x)=\sqrt{x}$; **d)** $u(x)=\sqrt{x+1}$.

• **A3. a)** $u(x)=-x$; **b)** $u(x)=-x$; **c)** $u(x)=\frac{\pi}{4}-x$.

## CAPITOLUL III. APLICAȚII ALE INTEGRALEI DEFINITE

### 1. Aria unei suprafețe plane (pag. 273)

• **E1. a)** $\frac{7}{2}$; **b)** $\sqrt{2}+\frac{9}{2}\arcsin\frac{1}{3}$; **c)** $\frac{1}{4}\ln\frac{5}{3}$; **d)** 1; **e)** $\frac{\pi}{8}$; **f)** $\frac{1}{8}\ln\frac{9}{5}$.

• **E2. a)** $\frac{16}{3}$; **b)** $\frac{39}{8}$; **c)** $\frac{16}{3}$; **d)** $\frac{(e-1)^2}{2}$. • **E3. a)** $\frac{32}{3}$; **b)** $\frac{128}{3}$; **c)** $\frac{20}{3}$; **d)** $\mathscr{A}=$ $=\int_{-1}^{0}\left(-2x+x^2\right)dx+\int_{0}^{2}\left(2x-x^2\right)dx+\int_{2}^{3}\left(-2x+x^2\right)dx=4$.

• **A2. a)** Se aleg $f, g:[-2, 2]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$, $g(x)=8-x^2$, $\text{aria}\left(\Gamma_{f,g}\right)=\int_{-2}^{2}\left[\left(8-x^2\right)-\right.$ $\left.-x^2\right]dx=\frac{64}{3}$; **c)** $A_1=2\left(\int_0^2\sqrt{6x}\,dx+\int_2^4\sqrt{16-x^2}\,dx\right)$, $A_2=\pi r^2-A_1$, $r=4$. • **A3.** $\frac{\pi}{4}-$ $-2+\operatorname{tg}\frac{3\pi}{8}$. • **A4.** $\frac{13}{6}$. • **A5.** $A=\int_4^5 -f(x)\,dx$. • **A9.** $\mathscr{A}=\int_0^1(x+1)^{\frac{1}{x}}\,dx<\int_0^1 e\,dx=e$.

• **A11.** $\text{aria}\left(\Gamma_f\right)=\frac{4}{3}$, $\text{aria}\left(\Gamma_{f,g}\right)=\frac{(2-m)^3}{6}$, $m=2-\sqrt[3]{4}$. • **A12.** $\text{aria}\left(\Gamma_f\right)=a^2\cdot$ $\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\pi}{6}\right)$, $a^2=12$. • **A13.** $\text{aria}\left(\Gamma_f\right)=1+\ln\frac{a^2+2a+6}{a^2+4a+6}$, $a=-3$, respectiv $a=0$.
**b)** 2.

## 2. Volumul corpurilor de rotație (pag. 279)

• **E1. a)** $\frac{256\pi}{15}$; **b), c)** $\frac{\pi^2}{2}$; **d)** $6\pi$; **e)** $\pi\left(1+\ln\frac{4}{9}\right)$; **f)** $\frac{35\pi}{3}$; **g)** $\frac{3\pi}{2}$; **h)** $\frac{(a+1)^3(3-a)+a^4}{12}\pi$; **i)** $\left(\frac{10}{3}+\ln 9\right)\pi$. • **E2. a)** $\frac{\pi^2}{36}$; **b)** $\pi\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$; **c)** $\frac{\pi}{2}\ln\frac{4}{3}$; **d)** $\frac{\pi}{2}\left(e^{\frac{\pi}{2}}-1\right)$.

• **A4.** $\frac{\pi}{2}(15-16\ln 2)$; • **A5.** $117\pi$. • **A6.** $\pi\int_0^1(\arccos x)^2\,dx-\pi\int_0^1\left(x-x^2\right)dx=$ $=\frac{\pi}{6}(6\pi-13)$.

## 3. Calculul unor limite de șiruri folosind integrala definită (pag. 285)

• **E1.** $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\int_0^1 f(x)\,dx$, unde: **a)** $f(x)=x$; **b)** $f(x)=x^4$; **c)** $f(x)=\sqrt{x}$; **d)** $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$; **e)** $f(x)=e^x$; **f)** $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$; **g)** $f(x)=\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$.

• **A1.** $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\int_0^1 f(x)$, unde: **a)** $f(x)=\frac{1}{x^2+3}$; **b)** $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}}$; **c)** $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x}}$; **d)** $f(x)=xe^{-x}$. • **A2.** Funcțiile care se integrează pe intervalul $[0, 1]$ sunt: **a)** $f(x)=\frac{1}{x^2-4}$; **b)** $f(x)=\frac{x^2}{9-x^2}$; **c)** $f(x)=\frac{x+1}{x^2+1}$; **d)** $f(x)=\ln(x+1)$.

• **A3.** Se consideră $f:[0, 1]\to\mathbb{R}, \Delta_n=\left(0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, ..., \frac{n}{n}\right)$, și punctele intermediare $\xi_k$ astfel: **a)** $\xi_k=\frac{2k-1}{2n}$, $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2};}$ **b)** $\xi_k=\frac{2k-1}{2n}$, $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$; **c)** $\xi_k=$ $=\frac{3k-1}{3n}\in\left(\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right)$, $f(x)=\frac{1}{3(x+1)}$; **d)** $\xi_k=\frac{\sqrt{k^2-k+1}}{n}$, $f(x)=\frac{1}{x+1}$. • **A4.** Se aplică exercițiul rezolvat 3. • **A6. a)** $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\int_0^1\frac{dx}{x+1}=\ln 2$; **b)** $a_n=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\xi_k}$, $\xi_k=\frac{k^2-f(k)}{kn}\in\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$, $k=\overline{1, n}$. • **A7. a)** $a_n=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\xi_k}$, $\xi_k=\frac{1}{n}\left(k-\sin\frac{\pi}{k}\right)\in$ $\in\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$, $k=\overline{1, n}$. **b)** $a_n=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\xi_k}$, $\xi_k=\frac{k^2}{n(k+1)}\in\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$, $k=\overline{1, n}$.

# CUPRINS



## ELEMENTE DE ALGEBRĂ

## ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ